ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Ενδεικτικές λύσεις

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{2}\end{cases} \quad \text{και } (\Sigma_2)\begin{cases}\alpha x+\beta y\ =4\\ 2\alpha x+3\beta y=-8\end{cases}$$

έχουν την ίδια λύση (x,y), να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

Λύση

Αν θέσουμε $\dfrac{1}{x}=\varphi$ και $\dfrac{1}{y}=\omega$, το σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\begin{cases}\varphi+\omega=\dfrac{1}{4}\\[2mm] 3\varphi+4\omega=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi=\dfrac{1}{4}-\omega\\[2mm] 3\left(\dfrac{1}{4}-\omega\right)+4\omega=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi=\dfrac{1}{4}-\omega\\[2mm] \omega=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \omega=-\dfrac{1}{4}\end{cases},$$

οπότε το σύστημα (Σ_1) έχει τη λύση: $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\varphi},\dfrac{1}{\omega}\right)=(2,-4)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα (Σ_2), οπότε θα έχουμε:

$$\begin{cases}2\alpha-4\beta\ =4\\ 4\alpha-12\beta=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-2\beta\ =2\\ \alpha-3\beta=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-2\beta=2\\ -\beta=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=10\\ \beta=4\end{cases}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z ισχύει ότι:

$$z=2(x+y) \qquad \text{και} \qquad z=3(x-y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y<x<z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x,y,z) για την οποία: $x^2+y^2+z^2=680$.

Λύση

(α) Επειδή $z=3(x-y)>0 \Rightarrow x-y>0$, έπεται ότι $x>y$.

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z=2(x+y)=3(x-y) \Leftrightarrow 2x+2y=3x-3y \Leftrightarrow x=5y,$$

οπότε προκύπτει: $z=2x+2y=12y$, οπότε $z-x=12y-5y=7y>0$, οπότε $z>x$.

Άρα έχουμε: $z>x>y \Leftrightarrow y<x<z$.

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι $y>0$, έχουμε:

$$x^2+y^2+z^2=680 \Leftrightarrow 25y^2+y^2+144y^2=680 \Leftrightarrow 170y^2=680 \Leftrightarrow y^2=4 \Leftrightarrow y=2.$$

Άρα είναι: $(x,y,z)=(10,2,24)$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A=8x+1$ και $B=2x-3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Λύση

Έστω $A=8x+1=\alpha^2$ και $B=2x-3=\beta^2$. Τότε λαμβάνουμε ότι:

$$x=\frac{\alpha^2-1}{8}=\frac{\beta^2+3}{2} \qquad (1)$$

και

$$\alpha^2-4\beta^2=13\ . \qquad (2)$$

Από τη σχέση 92) έχουμε:

$$\alpha^2-4\beta^2=13 \Leftrightarrow (\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)=13$$

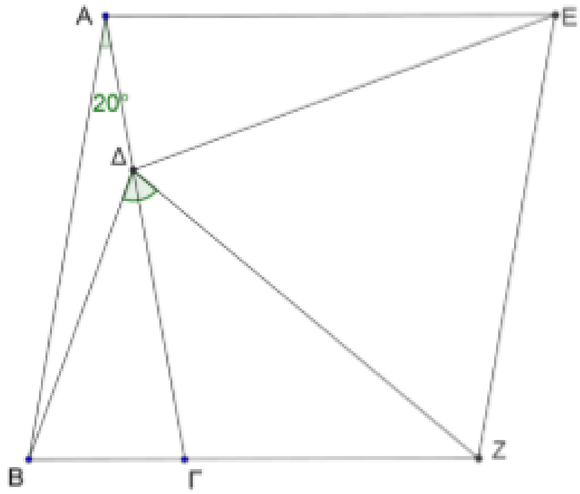
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=13\\ \alpha-2\beta=1\end{matrix}\right\} ή \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=-13\\ \alpha-2\beta=-1\end{matrix}\right\} ή \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=1\\ \alpha-2\beta=13\end{matrix}\right\} ή \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=-1\\ \alpha-2\beta=-13\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(7,3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(-7,-3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(7,-3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(-7,3).$$

Από όλα τα παραπάνω ζεύγη, από τις σχέσεις (1), προκύπτει ότι: $x=6$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A}=20^0$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ. Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε ΑΕ || ΒΓ, ΑΕ = ΑΒ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $B\hat{\Delta}Z$.



Σχήμα 4

Επειδή είναι $\hat{A} = 20^\circ$ και $AE \parallel B\Gamma$ έχουμε ότι:

$$E\hat{A}\Delta = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΑΔ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία $(AB = EA,\ B\Gamma = A\Delta)$ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες $\left(A\hat{B}\Gamma = E\hat{A}\Delta = 80^\circ\right)$.

Επομένως , έχουμε: $E\Delta = A\Gamma = AB$, $A\hat{E}\Delta = 20^\circ$.

Επειδή το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες $(AE = AB)$, είναι ρόμβος, οπότε $EZ = AB = E\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές. Επιπλέον, ισχύει: $A\hat{E}Z = \hat{B} = 80^\circ$. Επομένως $\Delta\hat{E}Z = A\hat{E}Z - A\hat{E}\Delta = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισόπλευρο.

Τότε είναι: $B\hat{Z}\Delta = B\hat{Z}E - \Delta\hat{Z}E = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $BZ\Delta$ $(ZB = AB = Z\Delta)$ προκύπτει ότι: $B\hat{\Delta}Z = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.