



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
75<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
1 Νοεμβρίου 2014

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 + 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2}$$

**Πρόβλημα 2**

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

**Πρόβλημα 3**

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (x^2 + y^2 + xy)^2 \quad \text{και} \quad B = 2 \left[ (x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4 \right],$$

όπου  $x, y$  είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών  $x, y$  διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του  $x$ .

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\sqrt{B}$  είναι ρητός, για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών  $x, y$ .

**Πρόβλημα 4**

Θεωρούμε τετράπλευρο  $ABCD$  με τη γωνία  $\hat{A} = 100^\circ$  και  $\hat{D} = 40^\circ$ . Αν  $DB$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{CDA}$  και  $DB = DC$ , να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας  $\hat{CAB}$ .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

### Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 + 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2}$$

#### Λύση

Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε  $x = 2014$ , η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x+1)^3 + (x-1)^3}{x^2 + (2x+1)^2} + \frac{(x+2)^3 + (x-2)^3 - 18x}{x^2 + (2x-1)^2} - \frac{4x(x^2+3)(5x^2+1)}{(5x^2+1)^2 - (4x)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+3)}{5x^2+4x+1} + \frac{2x(x^2+3)}{5x^2-4x+1} - \frac{4x(x^2+3)(5x^2+1)}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \\ &= 2x(x^2+3) \left[ \frac{1}{5x^2+4x+1} + \frac{1}{5x^2-4x+1} - \frac{2(5x^2+1)}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \right] \\ &= 2x(x^2+3) \left( \frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \right) = 2x(x^2+3) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα είναι

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 + 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2} = 0$$

### Πρόβλημα 2

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

#### Λύση

Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου Α είναι  $x$  ευρώ και τόμου Β είναι  $y$  ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x + 120y = 4000 \Leftrightarrow 5x + 6y = 200 \quad (1)$$

$$50 \cdot \frac{90x}{100} + 60 \cdot \frac{80y}{100} = 1680 \Leftrightarrow 45x + 48y = 1680 \quad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 6y = 200 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 45x + 54y = 1800 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6y = 120 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 20 \\ x = \frac{1680 - 48y}{45} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 20 \\ x = 16 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

**Πρόβλημα 3**

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (x^2 + y^2 + xy)^2 \quad \text{και} \quad B = 2[(x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4],$$

όπου  $x, y$  είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση  $A$  ως πολυώνυμο των μεταβλητών  $x, y$  διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του  $x$ .

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\sqrt{B}$  είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών  $x, y$ .

**Λύση**

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 + xy) \\ &= x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 \\ &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 + (xy)^2 + 2(x^2 + y^2)xy \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 \\ &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$(x^2 + y^2 + 2xy)^2 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$

$$\begin{aligned} B &= 2[(x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4] = 2[x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + x^4 + y^4] \\ &= 2[2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4] = 4(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4) \\ &= 4(x^2 + y^2 + xy)^2, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{B} = |2(x^2 + xy + y^2)| = 2(x^2 + xy + y^2) \in \mathbb{Q},$$

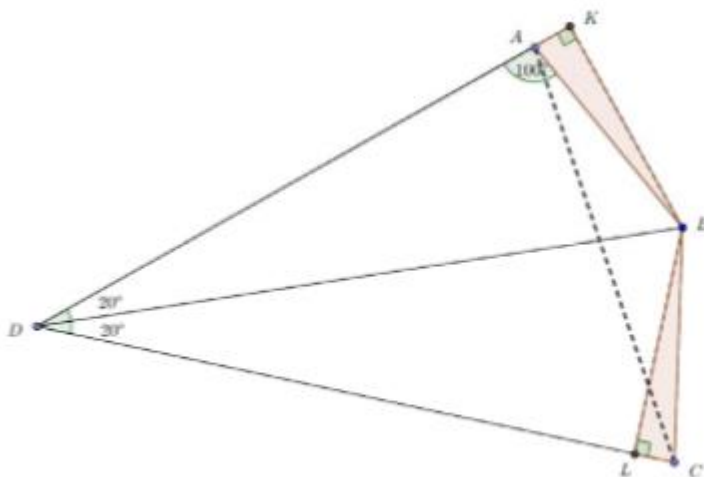
αφού οι αριθμοί  $x, y$  είναι ρητοί και  $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$ .

**Πρόβλημα 4**

Θεωρούμε τετράπλευρο  $ABCD$  με τη γωνία  $\hat{A} = 100^\circ$  και  $\hat{D} = 40^\circ$ . Αν  $DB$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{CDA}$  και  $DB = DC$ , να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας  $\hat{CAB}$ .

### Λύση

Εφόσον η  $DB$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $CDA$ , θα έχουμε ότι  $CDB = BDA = 20^\circ$  και από το ισοσκελές τρίγωνο  $DBC$  θα έχουμε ότι  $DBC = DCB = 80^\circ$  και επιπλέον έχουμε ότι  $BDA = 180^\circ - (100^\circ + 20^\circ) = 60^\circ$ . Αν τώρα φέρουμε τις προβολές  $BK$  και  $BL$ , αφού το  $B$  είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι  $BK = BL$  και  $BKA = 80^\circ$ , οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα  $BAK$  και  $BLC$  είναι ίσα, που σημαίνει ότι  $BA = BC$ . Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο  $BAC$  παίρνουμε ότι  $CAB = 20^\circ$ .



Σχήμα 4