Ευκλείδης Ά Λυκείου 2000-2001

1. Αν α και x πραγματικοί με $\alpha \geq 0$, να δειχτεί ότι $\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+a-1}} \geq 2$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Θεωρούμε 100 αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100}$ από τους οποίους οι 40 είναι ίσοι με 1 και οι 60 με 2 και τους τοποθετούμε πάνω σε ένα κύκλο έτσι, ώστε να μην υπάρχουν τρεις ίσοι αριθμοί σε διαδοχικές θέσεις. Σχηματίζονται έτσι 100 τριάδες T_i , i=1, 2, ..., 100, αριθμών σε διαδοχικές θέσεις πάνω στον κύκλο.

Έστω P_i είναι το γινόμενο και S_i είναι το άθροισμα των τριών αριθμών της τριάδας T_i , i=1, 2, ..., 100.

Να δειχτεί ότι:

1) $P_i = 2S_i - 6$, για κάθε i=1, 2, ..., 100.

2) $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{100} = 360$.

3. α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $x^4 + 4y^4$.

β) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $y \geq 2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x^4 + 4y^4$ είναι σύνθετος.

4. Θεωρούμε τις κάθετες ημιευθείες Ot, Os, το σημείο A της Ot με OA=x και το σημείο B της Os με OB=y και y<x. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ μέσα στη γωνία $t\hat{O}s$. Από την κορυφή Δ φέρνουμε ευθεία ε κάθετη στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $t\hat{O}s$ η οποία τέμνει την Os στο Ε και την Ot στο Ζ.

Να δειχτεί ότι:

1) ΑΖ=x+y και ΒΕ=2x.

2) Το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.