ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί α και $\alpha + 2$ είναι πρώτοι με $\alpha > 3$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha + 4$ είναι σύνθετος.

2. Οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\alpha + \beta = \lambda$. Να δεχθεί ότι

$$\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{1}{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\beta+\lambda} < \frac{3}{2\lambda}.$$

3. Έστω ΑΒΓ ένα σκαληνό τρίγωνο. Πόσα σημεία Δ υπάρχουν στο επίπεδο του τριγώνου τέτοια ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ να έχει άξονα συμμετρίας διαφορετικό από πλευρά του τριγώνου;

4. Έστω Α και Β δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα των οποίων η ένωση είναι το σύνολο {1, 2, 3, 4, 5}. Να αποδειχθεί ότι ένα τουλάχιστον από τα Α και Β περιέχει τουλάχιστον τη διαφορά δύο στοιχείων του.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ένας από τους αριθμούς α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2$ διαιρείται με τον 3 και αυτός πρέπει να είναι ο $\alpha + 1$. Άρα ο αριθμός $\alpha + 4 = \alpha + 1 + 3$ διαιρείται με τον 3.

2. Έχουμε

$$\frac{1}{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\beta+\lambda} = \frac{3\lambda}{\alpha\beta+2\lambda^2}.$$

Η πρώτη ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$4\alpha\beta \leq (\alpha+\beta)^2,$$

και η δεύτερη με

$$3\alpha\beta > 0.$$

3. Το Δ πρέπει να είναι συμμετρικό κορυφής του τριγώνου ως προς τη μεσοκάθετο της απέναντι πλευράς. Άρα υπάρχουν 3 τέτοια σημεία.

4. Έστω ότι κανένα από τα δύο σύνολα δεν περιέχει τη διαφορά δύο στοιχείων του. Τότε προφανώς το 2 δεν μπορεί να ανήκει στο ίδιο σύνολο με το 1 ούτε με το 4 γιατί $2 - 1 = 1$ και $4 - 2 = 2$. Έστω λοιπόν $2 \in A$, οπότε $1 \in B$ και $4 \in B$. Επειδή $4 - 1 = 3$, έπεται ότι $3 \notin B$ και επομένως $3 \in A$. Επειδή $5 - 2 = 3$, έπεται ότι $5 \notin A$ και επειδή $5 - 1 = 4$, έπεται $5 \notin B$. Άτοπο επειδή $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.