



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ και η παράσταση

$$K = \frac{\alpha|\delta - \gamma| + \alpha|\delta - \varepsilon| + \varepsilon|\beta - \alpha| + \varepsilon|\beta - \gamma|}{|\beta - \alpha| + |\beta - \gamma| + |\delta - \gamma| + |\delta - \varepsilon|}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι: $\beta < K < \delta$.

(ii) Αν είναι

$$x = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta), y = (\alpha + \gamma)(\beta + \delta), z = (\alpha + \delta)(\beta + \gamma),$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς x, y, z .

2. Στο εσωτερικό τριγώνου $AB\Gamma$ υπάρχει σημείο M τέτοιο ώστε $\widehat{MB\Gamma} = \widehat{M\Gamma B}$ και πάνω στις MB και $M\Gamma$ υπάρχουν σημεία Δ και E , αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Delta = AE$ και $\widehat{MA\Delta} = \widehat{MAE}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

3. Αν είναι $x, y > 0$ και $x^3 + y^2 \leq 64$, να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^3 < 512.$$

4. Έχουμε κέρματα και χαρτονομίσματα των 1, 10 και 100 ευρώ. Είναι δυνατόν με 1000 ακριβώς από αυτά να σχηματίσουμε το ποσό των 50000 ευρώ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. (i) Λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ εύκολα βρίσκουμε ότι $K = \gamma$, οπότε $\beta < K < \delta$.

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} x - y &= (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta - \gamma\delta \\ &= \alpha(\gamma - \beta) + \delta(\beta - \gamma) = (\gamma - \beta)(\alpha - \delta) < 0. \end{aligned}$$

Άρα είναι $x - y < 0$ δηλαδή $x < y$.

Ομοίως λαμβάνουμε $y - z = (\delta - \gamma)(\alpha - \beta) < 0$.

2. Επειδή είναι $\overline{MB\Gamma} = \overline{M\Gamma B}$, το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ισοσκελές με

$$MB = M\Gamma. \quad (1)$$

Επιπλέον, τα τρίγωνα $MA\Delta$ και MAE είναι ίσα γιατί έχουν:

AM κοινή πλευρά, $A\Delta = AE$, $\overline{MA\Delta} = \overline{MAE}$.

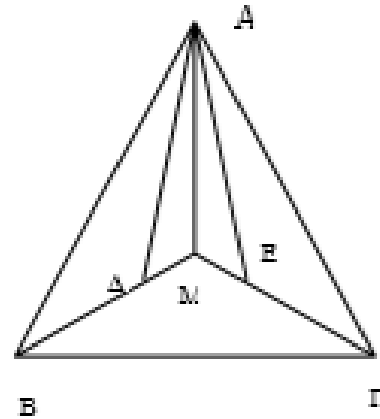
Άρα θα έχουν και

$$\overline{AM\Delta} = \overline{AME}. \quad (2)$$

Λόγω των (1) και (2) τα τρίγωνα MAB και MAG είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$AB = AG,$$

δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



3. Επειδή είναι $x, y > 0$ έχουμε

$x^3 + y^3 \leq 64 \Rightarrow x^3 < 64$ και $y^3 < 64 \Rightarrow x < 4$ και $y < 8 \Rightarrow x^4 < 4x^3$ και $y^3 < 8y^2$,
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^4 + y^3 < 4x^3 + 8y^2 < 8(x^3 + y^2) \leq 8 \cdot 64 = 512.$$

4. Αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε x κέρματα του ενός ευρώ, y χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και z χαρτονομίσματα των 100 ευρώ, τότε θα έχουμε τις ισότητες

$$x + 10y + 100z = 50000 \quad \text{και} \quad x + y + z = 1000, \quad (1)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$9y + 99z = 49000 \Rightarrow 9 \cdot (y + 11z) = 49000 \Rightarrow 9 \nmid 49000,$$

που είναι άτοπο, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του 49000 είναι ο αριθμός 13 που δεν διαιρείται με το 9.