ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}},$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0$, $xy\neq 1$ και $xy\neq -1$.

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}=\frac{\left(\frac{x^2y^2-1}{y^2}\right)^m\left(\frac{xy+1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(\frac{x^2y^2-1}{x^2}\right)^n\left(\frac{xy-1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}$$

$$=\frac{\left(x^2y^2-1\right)^{m-n}\cdot x^{2n}}{y^{2m}}\cdot\frac{(xy+1)^{n-m}\cdot y^{m-n}}{(xy-1)^{m-n}\cdot x^{n-m}}\cdot\frac{y^{m+n}}{x^{m+n}}$$

$$=\frac{(xy+1)^{m-n}(xy-1)^{m-n}\cdot(xy+1)^{n-m}}{(xy-1)^{m-n}}\cdot x^{2n-2n}\cdot y^{2m-2m}=1.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α, β αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \text{ και } \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37.$$

Λύση

Από την ισότητα $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|\geq 0$ προκύπτει ότι:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|\Leftrightarrow|\alpha-\beta|^2=\left(|\alpha|+|\beta|\right)^2$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$$

$$-\alpha\beta=|\alpha\beta|\Leftrightarrow(\alpha\geq 0 \text{ και } \beta\leq 0)\ ή\ (\alpha\leq 0 \text{ και } \beta\geq 0).$$

Από τη δεύτερη ισότητα λαμβάνουμε:

$$\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37 \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta+2)-(\alpha+\beta+2)=35$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+2)(\alpha^2\beta^2-1)=35,$$

από την οποία έχουμε ότι ο $\alpha^2\beta^2-1$ είναι ένας από τους παράγοντες του 35, δηλαδή έχουμε:

$$\alpha^2\beta^2-1=\pm 1 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 5 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 7 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 35$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2=2 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=0 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-4 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=8$$

$$\text{ή } \alpha^2\beta^2=-6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=36 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-34.$$

Οι αποδεκτές περιπτώσεις, αφού $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha^2\beta^2\geq 0$, είναι οι:

- $\alpha^2\beta^2=0$, η οποία οδηγεί στις λύσεις $(\alpha,\beta)=(0,-37)$ ή $(\alpha,\beta)=(-37,0)$.
- $\alpha^2\beta^2=36\Leftrightarrow \alpha\beta=-6$ (αφού α,β ετερόσημοι), η οποία οδηγεί στο σύστημα:

$$\left.\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha\beta=-6\end{cases}\right\}\Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(-3,2) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(2,-3).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\text{ΕΓ}=\text{ΖΔ}=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $\text{ΑΛ}\perp\text{ΕΖ}$

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α.

Λύση

(α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΔΕΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ($\text{ΑΔ}=\text{ΔΓ}=3\alpha$, $\text{ΔΖ}=\text{ΕΓ}=\alpha$). Άρα είναι ίσα και έχουν $\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ζ}=\text{Ε}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}$. Αν Μ είναι το σημείο τομής ΑΖ και ΔΕ, τότε έχουμε:

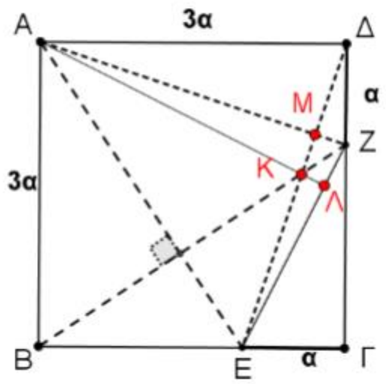
$$\text{Μ}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ}+\text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Μ}=\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ζ}+\text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Α}$$

$$=180^0-\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ}=180^0-90^\circ=90^\circ.$$

Άρα είναι $\text{ΕΔ}\perp\text{ΑΖ}$ και ομοίως αποδεικνύουμε ότι είναι $\text{ΖΒ}\perp\text{ΑΕ}$, οπότε το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΕΖ.

Άρα θα είναι και

$$\text{ΑΚ}\perp\text{ΕΖ} \text{ ή } \text{ΑΛ}\perp\text{ΕΖ}.$$



(β) Έχουμε ότι

$$(\mathrm{AEZ})=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{EZ}\cdot \mathrm{A\Lambda}=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot \mathrm{A\Lambda} \text{ και}$$

$$(\mathrm{AEZ})=(\mathrm{AB\Gamma\Delta})-(\mathrm{ABE})-(\mathrm{E\Gamma Z})-(\mathrm{A\Delta Z})=9\alpha^2-3\alpha^2-\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{2}=\frac{7\alpha^2}{2},$$

οπότε λαμβάνουμε: $\mathrm{A\Lambda}=\dfrac{7\sqrt{5}\alpha}{5}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc}=100a+10b+c$, όπου a,b,c ψηφία, $a>0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2$$

Λύση

Από τη σχέση $100\le \overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2<1000$ προκύπτει ότι:

$$10\le a+b^2+c^3\ \le 31, \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), δεδομένου ότι $a\in\{1,2,\dots,9\}$ και $b,c\in\{0,1,2,\dots,9\}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$c\in\{0,1,2,3\} \text{ και } b\in\{0,1,2,3,4,5\}. \qquad (2)$$

Επιπλέον η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2 \Leftrightarrow 100a+10b+c=\left(a+b^2+c^3\right)^2. \qquad (3)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Για $c=0$ η εξίσωση (3) γίνεται:

  $$100a+10b=\left(a+b^2\right)^2, \qquad (4)$$

  από την οποία για $b\in\{0,1,2,3,4,5\}$ δεν προκύπτουν a,b που την επαληθεύουν.

  Πράγματι, τα ψηφία a,b που ικανοποιούν την εξίσωση (4) πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $a+b^2$ να λήγει σε 0. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα

  $$(a,b)=(9,1) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (5,5),$$

  από τα οποία κανένα δεν ικανοποιεί την εξίσωση (4).

- Για $c=1$ η εξίσωση (3) γίνεται:

  $$100a+10b+1=\left(a+b^2+1\right)^2,$$

  από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός $a+b^2+1$ πρέπει να λήγει σε 1 ή 9. Έτσι πιθαν ζεύγη είναι τα

  $$(a,b)=(8,0) \text{ ή } (7,1) \text{ ή } (9,1) \text{ ή } (4,2) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3)$$
  $$\text{ ή } (9,3) \text{ ή } (2,4) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (3,5) \text{ ή } (5,5),$$

  από τα οποία προκύπτει μόνο η λύση $(a,b)=(4,4)$ και ο αριθμός $\overline{abc}=441$.

- Για $c=2$ η εξίσωση (3) γίνεται:

  $$100a+10b+2=\left(a+b^2+2\right)^2,$$

  η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 2.

- Για $c=3$ η εξίσωση (3) γίνεται:

  $$100a+10b+3=\left(a+b^2+3\right)^2,$$

  η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 3.