ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙ-ΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α, β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι για $\beta=0$, ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}=\alpha$ είναι ρητός, για κάθε ρητό αριθμό α.

Έστω ότι, για $\beta\neq 0$, ο αριθμός $\rho=\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$\rho-\alpha=\left(\alpha+\beta\sqrt{10}\right)-\alpha=\beta\sqrt{10}$$

θα είναι ρητός, αλλά και ο αριθμός $\dfrac{\rho-\alpha}{\beta}=\sqrt{10}$ θα είναι ρητός, που είναι άτοπο.

Άρα ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός, για $\beta=0$ και για κάθε ρητό αριθμό α.

(ii) Έστω ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$x^2=\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=5+\frac{2}{4}+\sqrt{10}=\frac{11}{2}+\sqrt{10},$$

θα είναι ρητός, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x|-2\right)^2=x^2+4\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$|x|^2-4|x|+4=x^2+4\alpha \Leftrightarrow x^2-4|x|+4=x^2+4\alpha \Leftrightarrow |x|=1-\alpha.$$

Επειδή είναι $|x|\geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha<1$, οπότε είναι $1-\alpha>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις:
$$x=1-\alpha \text{ ή } x=\alpha-1.$$
- $\alpha=1$, οπότε η εξίσωση έχει μόνο τη λύση $x=0$.
- $\alpha>1$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή του Α και είναι παράλληλη προς τη πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Δ και έστω Ε το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή Α. Από το Α τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την ΕΒ η οποία τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Μ και τη ΒΓ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι: ΑΒ = ΒΚ = ΚΔ = ΔΑ.

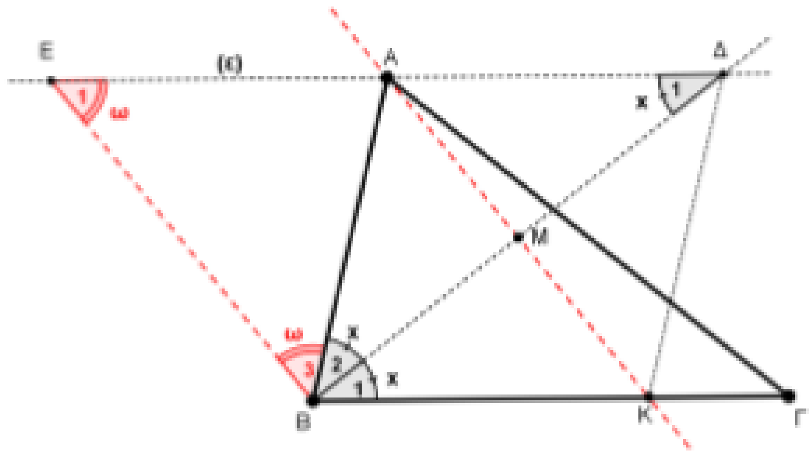
Λύση

Επειδή είναι ΑΔ Ρ ΒΓ θα ισχύει: $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 = \hat{x} = \frac{B}{2}$.

Επίσης η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, οπότε θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, δηλαδή:

$$AB = A\Delta. \qquad (1)$$



Σχήμα 3

Επειδή Ε είναι το συμμετρικό του Δ ως προς το Α, θα ισχύει:

$$A\Delta = AE. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε ΑΕ = ΑΒ και κατά συνέπεια $\hat{E}_1 = \hat{B}_3 = \hat{\omega}$.

Από το τρίγωνο τώρα ΒΕΔ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{E}_1 = 180^o \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{\omega} = 180^o \Rightarrow \hat{x} + \hat{\omega} = 90^o,$$

δηλαδή το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ορθογώνιο ($BE \perp B\Delta$) και εφόσον ΑΜ Ρ ΒΕ καταλήγουμε:

$$AM \perp B\Delta.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΔ η ΑΜ είναι ύψος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΒΔ.

Επειδή τώρα το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΔ, το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ισοσκελές και ίσο με το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ (διότι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και ΒΔ κοινή πλευρά). Άρα θα έχουν και ΑΒ = ΑΔ = ΒΚ = ΚΔ, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τις ισότητες
$$\alpha + \beta + \gamma = 2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2 .$$

Λύση
Από τις δεδομένες ισότητες λαμβάνουμε
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 2010^2 &\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 2010^2 \\ &\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2010^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2010^2 - 2\left(2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 67^2\right) \\ &\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2010^2 - \frac{2}{3}\cdot 2010^2 = \frac{2010^2}{3}.\end{aligned}$$
Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 - (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = \frac{2010^2}{3} - \frac{1}{3}\cdot 2010^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha-\beta = \beta-\gamma - \gamma-\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma,\end{aligned}$$
γιατί, αν ήταν $\alpha-\beta \neq 0$ ή $\beta-\gamma \neq 0$ ή $\gamma-\alpha \neq 0$, τότε θα είχαμε
$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 > 0.$$
Επομένως, από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma = 2010$ λαμβάνουμε $\alpha=\beta=\gamma=670$.