ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
λ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\leq\frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}.$$

Λύση
Έχουμε

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\leq\frac{|x|+x^2}{4}\Leftrightarrow 3x^2+4(|x|-1)\leq 3|x|+3x^2\Leftrightarrow |x|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq x\leq 4.$$

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}\Leftrightarrow 2x+2+x(x+1)>(x+2)^2\Leftrightarrow -x>2\Leftrightarrow x<-2.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στο διάστημα $[-4,-2)=\{x\in\mathbb{R}:-4\leq x<-2\}$.

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\left[(1+ax)^2-(a+x)^2\right]}{1-a^2}=\frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a,b με $ab(a-b)(1-a^2)\neq 0$.

Λύση
Για να ορίζονται οι δεδομένες παραστάσεις πρέπει να ισχύουν:

$$1-x^2\neq 0, 1-a^2\neq 0\,(\text{υπόθεση})\text{ και } a\neq b\,(\text{υπόθεση})\Leftrightarrow x\neq\pm 1.$$

Για $x\neq\pm1$, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\left(1+a^2x^2-a^2-x^2\right)}{\left(1-a^2\right)}=\frac{ab}{(a-b)^2}\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\left(1-a^2\right)\left(1-x^2\right)}{\left(1-a^2\right)}=\frac{ab}{(a-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow x(1+x)=\frac{ab}{(a-b)^2}\Leftrightarrow(a-b)^2x^2+(a-b)^2x-ab=0$$

Επειδή είναι $a\neq b$ η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=(a-b)^4+4ab(a-b)^2=(a-b)^2\left[(a-b)^2+4ab\right]=(a-b)^2(a+b)^2=\left(a^2-b^2\right)^2>0.$$

Άρα η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x_1=\frac{-(a-b)^2+(a^2-b^2)}{2(a-b)^2}=\frac{2ab-2b^2}{2(a-b)^2}=\frac{2b(a-b)}{2(a-b)^2}=\frac{b}{a-b} \text{ και}$$

$$x_2=\frac{-(a-b)^2-(a^2-b^2)}{2(a-b)^2}=\frac{2ab-2a^2}{2(a-b)^2}=\frac{-2a(a-b)}{2(a-b)^2}=\frac{-a}{a-b}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{b}{b-a}=1\Leftrightarrow b=b-a\Leftrightarrow a=0 \text{ και } \frac{b}{b-a}=-1\Leftrightarrow b=-b+a\Leftrightarrow a=2b,$$

$$\frac{-a}{a-b}=1\Leftrightarrow -a=a-b\Leftrightarrow 2a=b \text{ και } \frac{-a}{a-b}=-1\Leftrightarrow -a=b-a\Leftrightarrow b=0.$$

Επομένως, για τιμές των παραμέτρων a,b που ικανοποιούν τις υποθέσεις $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$ και $a\neq \pm 1$, έχουμε:

- Αν $(a-2b)(2a-b)\neq 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες
$$x_1=\frac{b}{a-b} \text{ και } x_2=\frac{-a}{a-b}.$$
- Αν $a=2b$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2=-2$.
- Αν $a=\frac{b}{2}$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2=-2$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και $\hat{\mathrm{A}}<45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα, και σημείο $\mathrm{M}\neq\mathrm{A}$ στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ και την ευθεία ΑΓ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z}=\hat{\mathrm{A}}$.

(β) Η ευθεία ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

Λύση

(α) Επειδή το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ θα είναι ΖΒ = ΖΜ και
$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z}=\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}=\omega.$$

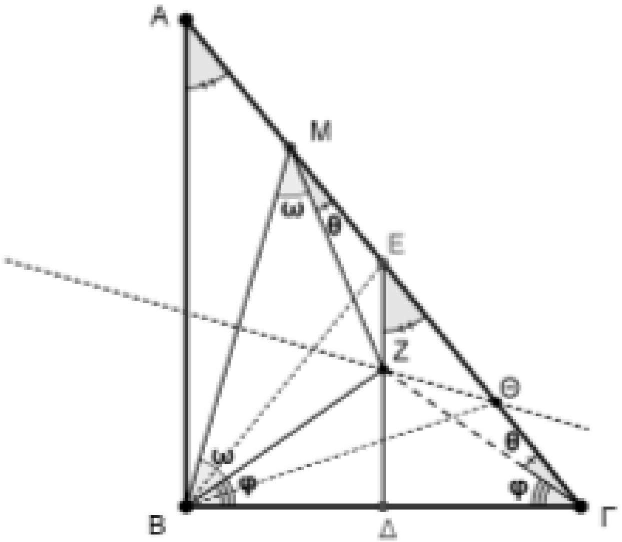
Επειδή είναι $\Delta\mathrm{E}\parallel\mathrm{AB}$ και $\mathrm{AB}\perp\mathrm{B}\Gamma$ έπεται ότι $\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{B}\Gamma$, δηλαδή η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Αφού $\mathrm{Z}\in\mathrm{B}\Gamma$ θα είναι ΖΒ = ΖΓ και
$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\varphi.$$

Επειδή ΜΖ = ΒΖ = ΓΖ θα είναι και
$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{M}=\theta.$$

Από το τρίγωνο ΒΜΓ, λόγω των προηγούμενων ισοτήτων, έχουμε
$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\Gamma+\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{M}+\Gamma\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}=180^\circ\Rightarrow 2\omega+2\varphi+2\theta=180^\circ$$
$$\omega+\varphi+\theta=90^\circ. \qquad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ λαμβάνουμε
$$\varphi+\theta=\hat{\Gamma}=90^\circ-\hat{\mathrm{A}}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:
$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z}=\omega=\hat{\mathrm{A}}.$$



Σχήμα 3

(β) Επειδή το σημείο Θ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ η ΘΖ είναι διχοτόμος της γωνί $B\hat{\Theta}E$. Επίσης, επειδή η ΒΕ είναι διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ προς την υποτε νουσα, θα είναι $BE = \frac{A\Gamma}{2} = E\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με την ΕΔ ύψος και δ χοτόμο της γωνίας $B\hat{E}\Gamma$, άρα και της γωνίας $B\hat{E}\Theta$. Επομένως στο τρίγωνο ΒΘΕ το Ζ είναι τ σημείο τομής των διχοτόμων του, οπότε και η ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{B}E$.

Πρόβλημα 4

Αν υπάρχουν ακέραιοι x, y, a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2 + \left(y^2 - a^2\right)x + y\left(y - a\right)^2 = 0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έστω ότι οι ακέραιοι x, y, a επαληθεύουν την εξίσωση: $yx^2 + \left(y^2 - a^2\right)x + y\left(y - a\right)^2 = 0$.

Μετά τις πράξεις και αναδιάταξη των όρων η εξίσωση, ως προς άγνωστο το a, γράφεται:

$$\left(y - x\right)a^2 - 2y^2 a + y\left(x^2 + xy + y^2\right) = 0.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση, η εξίσωση αυτή με άγνωστο το a έχει ακέραια λύση, αλλά και ακέραιους συντελεστές. Επομένως, η διακρίνουσα της είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, δηλαδ υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε

$$\Delta = 4y^4 - 4y\left(y - x\right)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 4y\left[y^3 - \left(y^3 - x^3\right)\right] = 4yx^3 = xy\left(2x\right)^2 = \kappa^2.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι: $xy = \left(\frac{\kappa}{2x}\right)^2$, όπου ο αριθμός $\frac{\kappa}{2x}$ είναι ρητός.