

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

**ΘΕΜΑ Α**

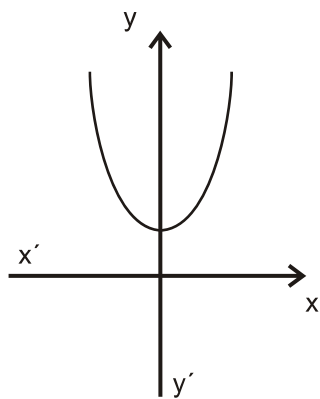
**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 7**

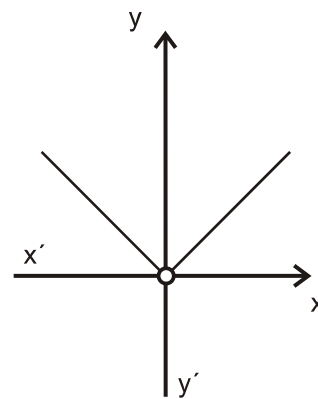
**A2.** Έστω  $A$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;

**Μονάδες 4**

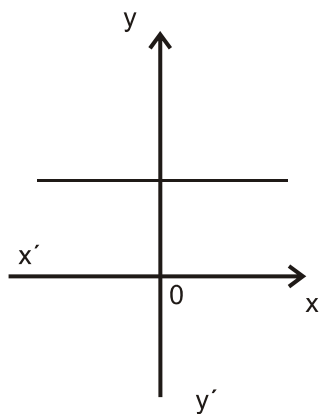
**A3.** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g, F, G, H, T$ .



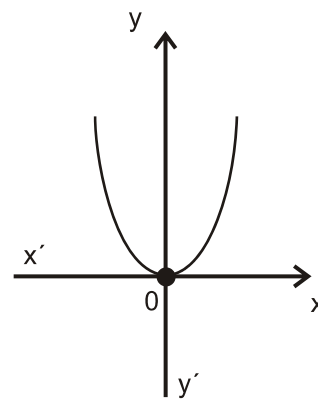
**(f)**



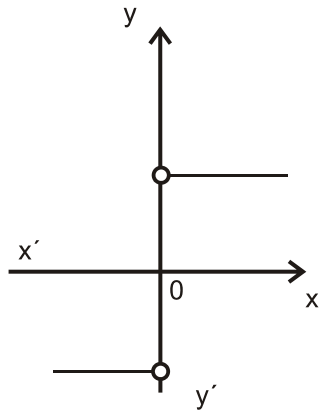
**(g)**



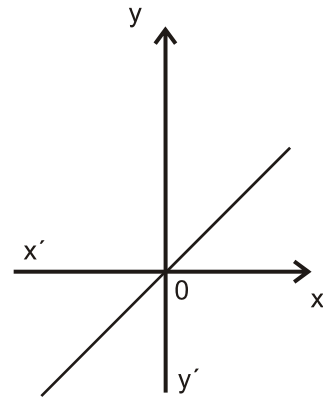
**(F)**



**(G)**



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

**Μονάδες 4**

**A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

- α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)
- β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.
- β) Αν μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το  $[0, 1]$  και σύνολο τιμών το  $[2, 3]$ , τότε ορίζεται η  $f \circ g$  με πεδίο ορισμού το  $[0, 1]$  και σύνολο τιμών το  $[2, 3]$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$ .

**B1.** Να υπολογίσετε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής.  
**Μονάδες 3**

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι  $\alpha = 1$ .

**B2.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[\frac{1}{2}, 4]$ .  
**Μονάδες 6**

**B3.** Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = -\frac{1}{4}x + 2018$  και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.  
**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.  
**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο:  $f(x) = 2 \eta \mu x - x$ .

**Γ1.** Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$  (τοπικά και ολικά).  
**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x_0 \in [0, \pi]$  η γραφική παράσταση της  $f$  και η εφαπτομένη της στο  $A(x_0, f(x_0))$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.  
**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sigma \upsilon \nu x \, dx$ .  
**Μονάδες 8**

- Γ4.** α) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  . (μονάδες 2)
- β) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$  . (μονάδες 5)

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο:  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$  .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 5**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το διάστημα  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 5**

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 2^{f(x)} - 1$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 5**

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0, \text{ όπου } 0 < \alpha < 1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς  $x$ , μία στο διάστημα  $(0, 1)$  και μία στο διάστημα  $(1, 2)$ .

**Μονάδες 5**

- Δ5.** Αν  $F$  είναι μια αρχική συνάρτηση της  $f$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$  με  $F(e) = e \cdot \ln 2$ , να αποδείξετε ότι  $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$ .

**Μονάδες 5**

⋮

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**