<u>Βασικά σημεία της παρουσίασης</u>:

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Από τον 16ο στον 21ο αιώνα

(Η προσπάθεια διευκόλυνσης των υπολογισμών που οδήγησε στο Σύμπαν της γνώσης)

ΚΥΡΙΑΚΟΣ ΓΡΗΓΟΡΙΑΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ
gkyr57@otenet.gr

Τον όρο λογάριθμος χρησιμοποίησε πρώτος ο John Napier στο έργο του <<Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio>> (Περιγραφή του θαυμαστού κανόνα των λογαρίθμων) που εκδόθηκε στο Εδιμβούργο το 1614. Γιατί όμως υπήρξε ανάγκη ώστε να επινοηθεί μια καινούργια έννοια στα Μαθηματικά;

Κατά τον 16ο αιώνα, δηλαδή τον αιώνα που προηγήθηκε από τον ορισμό του λογαρίθμου, είχαμε σημαντικές αλλαγές και ανακατατάξεις τόσο σε Ευρωπαϊκό όσο και σε παγκόσμιο επίπεδο. Αυτές είχαν να κάνουν:

- Με τις ανακαλύψεις νέων χωρών και ηπείρων.
- Με τη ραγδαία ανάπτυξη του εμπορίου και της οικονομίας πολλών χωρών.
- Με την ταχύτατη εξέλιξη πολλών επιστημονικών πεδίων. Να σημειώσουμε ιδιαίτερα την έκδοση του βιβλίου του Κοπέρνικου <<De Revolutionibus Orbium Celestium>> (περί της περιστροφής των ουράνιων σφαιρών) το 1543. Βιβλίο με σημαντική επίδραση στην επιστήμη, ίσως όμως σημαντικότερη επίδραση στη φιλοσοφία, μιας και μετά από αυτό άλλαξε ριζικά ο τρόπος που έβλεπε ο άνθρωπος το Σύμπαν και τη θέση του μέσα σ' αυτό.

Όλα τα παραπάνω έκαναν πιεστική την ανάγκη για **<u>ΤΑΧΥΤΗΤΑ</u>** και **<u>ΑΚΡΙΒΕΙΑ</u>** στους υπολογισμούς. Οι δυσκολίες εμφανίζονταν κυρίως στην εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων. Οι πρώτες προσπάθειες που έγιναν στα μέσα του 16ου αιώνα οδήγησαν σε κάποια απλοποίηση των πράξεων με την μετατροπή του πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση και της διαίρεσης σε αφαίρεση. Αυτό συνέβη με την αντιστοίχηση των όρων αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων.

Συγκεκριμένα στο βιβλίο του Stifel (ένας από τους πρωτοπόρους στην απλοποίηση των υπολογισμών) "Arithmetica Integra" (Αριθμητική πλήρης) (1544) βλέπουμε διατυπωμένους τους παρακάτω κανόνες:

Α.Π.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
Γ.Π.	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	…

<u>1ος κανόνας:</u> Ο πολλαπλασιασμός 2 όρων της γεωμετρικής προόδου ανάγεται στην πρόσθεση των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής προόδου, π.χ. 16·128=2048 (4+7=11).

2^{ος} κανόνας: Η διαίρεση δύο όρων της γεωμετρικής προόδου ανάγεται στην αφαίρεση των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής προόδου, π.χ. 8192:256=32 (13-8=5).

3^{ος} κανόνας: Η ύψωση ενός όρου της γεωμετρικής προόδου σε δύναμη ανάγεται στον πολλαπλασιασμό του αντίστοιχου όρου της αριθμητικής προόδου με τον εκθέτη της δύναμης, π.χ. $8^4=4096$ ($3\cdot 4=12$).

4^{ος} κανόνας: Η εξαγωγή ρίζας ενός όρου της γεωμετρικής προόδου ανάγεται στη διαίρεση του αντίστοιχου όρου της αριθμητικής προόδου με τον δείκτη της ρίζας, π.χ. $\sqrt[4]{4096}=8$ (12:4=3).

Οι κανόνες μπορούν να διατυπωθούν με τον εκθετικό συμβολισμό για τις δυνάμεις ως εξής:

1. $2^\mu \cdot 2^\nu = 2^{\mu+\nu}$, **2**. $2^\mu : 2^\nu = 2^{\mu-\nu}$, **3**. $(2^\mu)^\nu = 2^{\mu\nu}$ **4**. $\sqrt[\nu]{2^\mu} = 2^{\frac{\mu}{\nu}}$

και ισοδυναμούν με τις 4 βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων

1.log(χψ)=logχ+logψ, **2**.log(χ:ψ)=logχ-logψ, **3**.$\log\chi^\nu=\nu\log\chi$ **4**.$\log\sqrt[\nu]{\chi}=\frac{1}{\nu}\log\chi$.

Όταν αναζητούμε **σήμερα** τον $\log_2 16$ αναζητούμε τον εκθέτη στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο 2 ώστε να βρούμε το 16. Έτσι γράφουμε $\log_2 16=4$.

Από τον παραπάνω πίνακα αν σχηματίσουμε τη συνεχή αναλογία $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=\frac{64}{32}=\ldots$**, ο 4 που είναι ο $\log_2 16$ "δείχνει" πόσους λόγους χρειαζόμαστε στην προηγούμενη αναλογία ώστε να βρεθεί ο όρος 16. Πράγματι ο λογάριθμος είναι ο αριθμός που μετράει λόγους.**

Είναι φανερό ότι οι δύο πρόοδοι που χρησιμοποίησε ο Stifel αποτελούν ουσιαστικά ένα σύστημα λογαρίθμων με βάση το 2, χωρίς όμως πρακτική σημασία, αφού οι προτάσεις του Stifel ίσχυαν μόνο για ακέραιες τιμές των εκθετών. Έπρεπε συνεπώς να επεκταθούν σ' ένα συνεχές σύνολο τιμών και για το σκοπό αυτό ήταν απαραίτητη μια γεωμετρική πρόοδος της οποίας οι όροι να βρίσκονται πολύ κοντά ο ένας στον άλλο (να παρουσιάζουν δηλαδή μεγάλη πυκνότητα). Μια τέτοια πρόοδος θα είχε λόγο έναν αριθμό λίγο μικρότερο(λογαριθμικό σύστημα του Napier) ή λίγο μεγαλύτερο(λογαριθμικό σύστημα του Bürgi) από τη μονάδα. **Ο αριθμός e εμφανίζεται όταν προσπαθούμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια γεωμετρική πρόοδο** (βλ.συμπληρωματικά της παρουσίασης-το λογαριθμικό σύστημα του Bürgi). Το τεράστιο αυτό έργο έφεραν εις πέρας δουλεύοντας ανεξάρτητα ο John Napier (**1614**) και ο Joost Bürgi (**1620**).

Οι πίνακες του Napier διαδόθηκαν περισσότερο επειδή δημοσιεύτηκαν νωρίτερα αλλά κυρίως εξαιτίας του ότι ήταν προσανατολισμένοι σε τριγωνομετρικούς υπολογισμούς , που ήταν απαραίτητοι στους αστρονόμους. Η προσπάθεια να γίνουν πιο εύχρηστοι οι λογάριθμοι οδήγησε (από τον Briggs) στους λογαρίθμους που ονομάστηκαν **δεκαδικοί**(**1624**). Αργότερα, το **1668**, εμφανίζονται οι **φυσικοί λογάριθμοι**, όρο που χρησιμοποίησε ο N.Mercator θέλοντας να τους διακρίνει από τους δεκαδικούς. Η φυσική σημασία με την οποία είχαν σχέση αυτοί οι λογάριθμοι είχε να κάνει με την έννοια του εμβαδού. Συγκεκριμένα αν σχηματίσουμε εμβαδά μικτόγραμμων τραπεζίων με την γραφική παράσταση της υπερβολής $\psi=\frac{1}{x}$ και τις παράλληλες ευθείες από σημεία του άξονα χ΄χ των οποίων οι τετμημένες βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο, τότε τα εμβαδά αυτά σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο.

Όταν κυκλοφόρησαν οι πίνακες του Napier γνώρισαν ενθουσιώδη υποδοχή αλλά και πλατιά διάδοση από την Αγγλία και την Ηπειρωτική Ευρώπη μέχρι τη μακρινή Κίνα. Ήταν από τις λίγες φορές που αυτό συνέβη για μια καινούργια μαθηματική ιδέα. Ο δε ρόλος των λογαρίθμων ως μέσο απλοποίησης των υπολογισμών ήταν κυρίαρχος έως λίγο πριν το τέλος του 20ού αιώνα, οπότε ο ρόλος τους αυτός ατόνησε με την ευρύτατη διάδοση των μικροϋπολογιστών.

Εν τούτοις η εμφάνιση της λογαριθμικής συνάρτησης κατά τη διάρκεια του 18ου αιώνα, παράλληλα με την επινόηση και ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, είναι αυτή που κυριαρχεί και βρίσκει εφαρμογές σε πολλούς και διαφορετικούς τομείς όχι μόνο των μαθηματικών αλλά και άλλων επιστημών.

Ενδεικτικά μπορούμε να αναφέρουμε την **Ψυχολογία** (νόμος των Weber-Fechner που εκφράζει τη λογαριθμική σχέση μεταξύ του αισθήματος και του μεγέθους του ερεθίσματος), τη **Σεισμολογία** (στον ορισμό του μεγέθους ενός σεισμού σύμφωνα με την κλίμακα Richter), τη **Χημεία** (περιγραφή της οξύτητας ενός διαλύματος με το PH), την **Αστρονομία** (στο φαινόμενο μέγεθος που μετράει τη λαμπρότητα των αστέρων λογαριθμικά μιας και το ανθρώπινο μάτι ανταποκρίνεται στη λαμπρότητα λογαριθμικά), την **Ακουστική** (η μονάδα Bel και η περισσότερο χρησιμοποιούμενη decibel(=0,1 Bel) ορίζονται με τη βοήθεια των δεκαδικών λογαρίθμων και αυτό συμβαίνει επειδή το ανθρώπινο αυτί ανταποκρίνεται λογαριθμικά στην ακουστική ισχύ), τη **Φυσική-Θεμοδυναμική** (κυρίως στη φυσική εντροπία των Clausius-Boltzman. Η εντροπία ενός συστήματος εκφράζει το βαθμό απροσδιοριστίας του και η μαθηματική έκφραση της εντροπίας περιέχει τη λογαριθμική συνάρτηση), τη **Θεωρία Πληροφοριών** (στην πληροφοριακή εντροπία των Hartley-Shannon).