**Θέμα 1**

**1.** Αν $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε στοιχείο της στήλης Α να αντιστοιχεί στο ίσο του που βρίσκεται στη στήλη Β.

*(3 μονάδες)*

| **Στήλη Α** | **Στήλη Β** |
|---|---|
| **Α.** $\left\|\frac{1}{z}\right\|$ | **1.** $0$ |
| | **2.** $1$ |
| **Β.** $1-\left\|z^{20}\right\|$ | **3.** $2$ |
| | **4.** $\frac{1}{2}$ |
| **Γ.** $\left\|\frac{(\bar{z})^{31}}{2\left\|-z^2\right\|}\right\|$ | **5.** $4$ |

| **Α** | **Β** | **Γ** |
|---|---|---|
| | | |

**2.** Αν $\mathrm{Im}(z+i)=8$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών $z$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στην ευθεία $y=8$. *(0,5 μονάδες)*

**Σ** **Λ**

**3.** Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ , $\alpha\neq 0,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ έχει ρίζα τον αριθμό $2+i$ τότε θα έχει ρίζα και τον $\frac{5}{2+i}$. *(0,5 μονάδες)*

**Σ** **Λ**

**4.** Ισχύει $(z+2i)(\bar{z}-2i)\geq 0$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$. *(0,5 μονάδες*

**Σ** **Λ**

**5.** Αν για τους μιγαδικούς $z$ και $w$ με εικόνες τα σημεία Α και Β αντίστοιχα ισχύουν $|z|=|w|$ και $|z|^2+|w|^2=|z-w|^2$ , τότε το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AOB}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Το σημείο Ο είναι η αρχή του μιγαδικού επιπέδου. *(0,5 μονάδες)*

**Σ** **Λ**

**Θέμα 2**

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq \pm i$ και $w = \dfrac{z}{z^2+1}$.

**α)** Να δείξετε ότι αν $w \in \mathbb{R}$ τότε $z \in \mathbb{R}$ ή $|z| = 1$. *(2 μονάδες)*

**β)** Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $\dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. *(1 μονάδες)*

**γ)** Αν $z_1, z_2$ οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την παράσταση

$K = \dfrac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}$. *(2 μονάδες)*

**Θέμα 3**

Αν για τους μιγαδικούς $z$ και $w$ ισχύει $(2z + w)^7 = (1 + 2z\bar{w})^7$ και η εικόνα του $w$ δεν ανήκει σε κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ=1 τότε :

**α)** να βρείτε που κινείται η εικόνα Μ του μιγαδικού $z$. *(3 μονάδες)*

**β)** να βρείτε τους μιγαδικούς $z$ για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$. *(2 μονάδες)*

**Θέμα 4**

**Α.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς της μορφής $z = t + (a - t)i, \quad a, t \in \mathbb{R}$ και $a > 0$ .

**Α1.** Δείξτε ότι ο μιγαδικός $z$ κινείται σε μία ευθεία της οποίας η εξίσωση να βρεθεί. *(1 μονάδα)*

**Α2.** Να βρείτε την τιμή του πραγματικού α ώστε η απόσταση της αρχής των αξόνων από την παραπάνω ευθεία να ισούται με $1500 \cdot \sqrt{2}$ . *(1 μονάδα)*

**Β.** Θεωρούμε την εξίσωση $w^2 - \eta\mu\theta \cdot w + 2011^2 = 0, \quad \theta \in R, w \in C.$

**Β1.** Δείξτε ότι για κάθε τιμή του $\theta$ η εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες των οποίων το πραγματικό μέρος ισούται με $\dfrac{1}{2} \cdot \eta\mu\theta$ *(1 μονάδα)*

**Β2.** Δείξτε ότι καθώς το θ μεταβάλλεται οι εικόνες των παραπάνω ριζών κινούνται σε κύκλο. *(1 μονάδα)*

**Γ.** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z - w|$, όπου $z$ και $w$ τυχαίοι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες ανήκουν στην ευθεία του ερωτήματος Α2 και στον κύκλο του ερωτήματος Β2. *(1 μονάδα)*

***Καλή Επιτυχία !!!***

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## Θέμα 1

**1.** $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \quad |z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

**Α.** $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}=1$

**Β.** $1-\left|z^{20}\right|=1-|z|^{20}=1-1^{20}=1-1=0$

**Γ.** $\left|\frac{(\overline{z})^{31}}{2\left|-z^2\right|}\right|=\frac{\left|(\overline{z})^{31}\right|}{\left|2\left|-z^2\right|\right|}=\frac{|\overline{z}|^{31}}{2\left|-z\right|^2}=\frac{|z|^{31}}{2|z|^2}=\frac{1}{2}$

| Α | Β | Γ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 |

**2.** Αν $z=x+yi$ , $x,y\in\mathbb{R}$ τότε $z+i=x+yi+i=x+(y+1)i$ , $x,y\in\mathbb{R}$
Άρα $\text{Im}(z+i)=8\Leftrightarrow y+1=8\Leftrightarrow y=7$. (ΛΑΘΟΣ)

**3.** Εφόσον $z_1=2+i$ τότε η άλλη ρίζα θα πρέπει να είναι η συζυγής της. Άρα
$\frac{5}{2+i}=\frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5(2-i)}{5}=2-i=\overline{z}_1$ (ΣΩΣΤΟ)

**4.** $(z+2i)(\overline{z}-2i)\geq 0\Leftrightarrow (z+2i)\left(\overline{z+2i}\right)\geq 0\Leftrightarrow |z+2i|^2\geq 0$ ισχύει για κάθε $z\in\mathbb{C}$. (ΣΩΣΤΟ)

**5.** $(OA)=|z|$, $(OB)=|w|$ και $(AB)=|z-w|$.
Επομένως $|z|=|w|\Leftrightarrow (OA)=(OB)$ άρα ισοσκελές
$|z|^2+|w|^2=|z-w|^2\Leftrightarrow (OA)^2+(OB)^2=(AB)^2$ Πυθαγόρειο Θεώρ.
Άρα ορθογώνιο με $A\hat{O}B=90^0$ (ΣΩΣΤΟ)

## Θέμα 2

**Α)** $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \overline{w}=w\Leftrightarrow \frac{\overline{z}}{\overline{z}^2+1}=\frac{z}{z^2+1}\Leftrightarrow \overline{z}\left(z^2+1\right)=z\left(\overline{z}^2+1\right)\Leftrightarrow z^2\overline{z}+\overline{z}=z\overline{z}^2+z\Leftrightarrow$

$z^2\overline{z}+\overline{z}-z\overline{z}^2-z=0\Leftrightarrow z^2\overline{z}-z\overline{z}^2-z+\overline{z}=0\Leftrightarrow z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0\Leftrightarrow$

$(z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0\Leftrightarrow (z-\overline{z})\left(|z|^2-1\right)=0\Leftrightarrow z-\overline{z}=0$ ή $|z|^2-1=0\Leftrightarrow$

$z=\overline{z}$ άρα $z\in\mathbb{R}$ ή $|z|=1$

**Β)** $\frac{z}{z^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(z^2+1\right)=3z\Leftrightarrow \sqrt{3}z^2-3z+\sqrt{3}=0\overset{:\sqrt{3}}{\Leftrightarrow}$

$z^2-\sqrt{3}z+1=0$ , $z\neq\pm i$

$\Delta = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4 = 3 - 4 = -1 < 0$ . Άρα οι λύσεις είναι $z_{1,2} = \dfrac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2} i$

**Γ)** Από τους τύπους Vieta έχουμε :

$$z_1 + z_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{3}$$

$$z_1 \cdot z_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = 1$$

Άρα $K = \dfrac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2} = \dfrac{1 - i}{4 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{1 - i}{7}$

## Θέμα 3

**A)** $(2z + w)^7 = (1 + 2z\,\overline{w})^7 \Rightarrow$

$$\left|(2z + w)^7\right| = \left|(1 + 2z\,\overline{w})^7\right| \Leftrightarrow \left|(2z + w)\right|^7 = \left|(1 + 2z\,\overline{w})\right|^7 \Leftrightarrow$$

$$\left|(2z + w)\right| = \left|(1 + 2z\,\overline{w})\right| \Leftrightarrow \left|(2z + w)\right|^2 = \left|(1 + 2z\,\overline{w})\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z + w)\left(\overline{2z + w}\right) = (1 + 2z\,\overline{w})\left(\overline{1 + 2z\,\overline{w}}\right) \Leftrightarrow$$

$$(2z + w)(2\overline{z} + \overline{w}) = (1 + 2z\,\overline{w})(1 + 2\overline{z}\,w) \Leftrightarrow$$

$$4z\overline{z} + 2z\overline{w} + 2\overline{z}w + w\overline{w} = 1 + 2\overline{z}w + 2z\overline{w} + 4z\,\overline{z}\,w\overline{w} \Leftrightarrow$$

$$4z\overline{z} + w\overline{w} - 1 - 4z\,\overline{z}\,w\overline{w} = 0 \Leftrightarrow 4|z|^2 + |w|^2 - 1 - 4|z|^2|w|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4|z|^2\left(1 - |w|^2\right) - \left(1 - |w|^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - |w|^2\right)\left(4|z|^2 - 1\right) = 0 \overset{|w| \neq 1}{\Leftrightarrow} 4|z|^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{2}$$

Άρα η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο O(0, 0) , ακτίνα $\rho = \dfrac{1}{2}$ και εξίσωση

$c: x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$.

**B)** Αν $z = x + yi$ , $x, y \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4} \\ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = \dfrac{1}{4} \\ \rightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{8} \\ \rightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \text{ ή } x = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \rightarrow \end{cases}$$

Για $x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ έχουμε $y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ και $z = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} i$

Για $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ έχουμε $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ και $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4} i$

## Θέμα 4

**Α. Α1.** Θέτουμε

$$\begin{cases} x = t \\ y = \alpha - t \end{cases}$$ και απαλείφουμε την παράμετρο t.

Επομένως προκύπτει η εξίσωση $y=\alpha-x$ δηλαδή η ευθεία $\varepsilon:\ x+y-\alpha=0$.

**A2.** $d(O,\varepsilon)=1500\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|1\cdot 0+1\cdot 0-\alpha|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1500\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$\dfrac{|\alpha|}{\sqrt{2}}=1500\sqrt{2}\Leftrightarrow\alpha=3000\ (\alpha>0)$

Επομένως η έχουμε $\varepsilon:\ x+y-3000=0$

**B.B1.** $w^2-\eta\mu\theta\cdot w+2011^2=0,\quad \theta\in R, w\in C.$

$\Delta=\eta\mu^2\theta-4\cdot 2011^2<0$

$$w_{1,2}=\frac{\eta\mu\theta\pm i\sqrt{4\cdot 2011^2-\eta\mu^2\theta}}{2}$$

Επομένως $\mathrm{Re}(w)=\dfrac{\eta\mu\theta}{2}$ και $\mathrm{Im}(w)=\pm\dfrac{\sqrt{4\cdot 2011^2-\eta\mu^2\theta}}{2}$

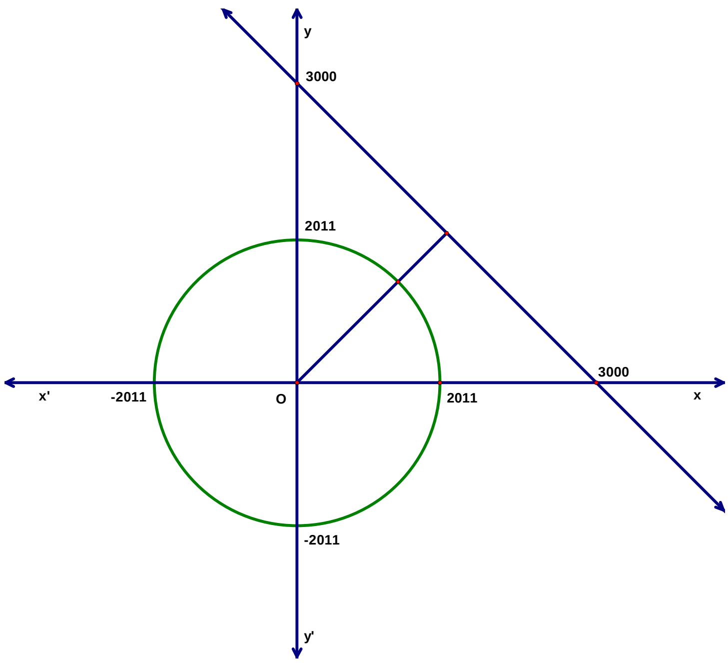
**B2.** Θέτουμε $x=\dfrac{\eta\mu\theta}{2}\ (1)$ και $y=\pm\dfrac{\sqrt{4\cdot 2011^2-\eta\mu^2\theta}}{2}\ (2)$ και προσπαθούμε να απαλείψουμε την παράμετρο θ.

Από την (1) έχουμε $\eta\mu\theta=2x$ και αντικαθιστώντας στη (2) έχουμε :

$$y=\pm\frac{\sqrt{4\cdot 2011^2-\eta\mu^2\theta}}{2}\Leftrightarrow 2y=\pm\sqrt{4\cdot 2011^2-4x^2}\Leftrightarrow$$

$$4y^2=4\cdot 2011^2-4x^2\Leftrightarrow x^2+y^2=2011^2$$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στον κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα ρ = 2011




**Παρατήρηση :** Ο **γεωμετρικός τόπος** των ριζών της εξίσωσης δεν είναι ολόκληρος ο κύκλος αλλά δύο τόξα του για τα οποία ισχύει : $-1\le\eta\mu\theta\le 1\Leftrightarrow -1\le 2x\le 1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}$.

**Γ.** Η ελάχιστη τιμή του μέτρου είναι $\left|z-w\right| = d\left(O,\varepsilon\right) - \rho = 1500\sqrt{2} - 2011$