Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΟΥ ΜΗΝΑ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Αν n είναι θετικός ακέραιος, x πραγματικός αριθμός, και [x] συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x, δείξτε ότι: $\sum_{k=0}^{n-1}[x+\frac{k}{n}]=[nx]$

Απόδειξη

Επειδή $0\leq\frac{k}{n}<1$ θα είναι $[x+\frac{k}{n}]=[x]$ ή $[\chi]+1$. Έστω ο φυσικός αριθμός m, με την ιδιότητα $[x+\frac{m}{n}]=[x],\ [x+\frac{m+1}{n}]=[x]+1$. Θα έχουμε τότε:

$$\sum_{k=0}^{n-1}[x+\frac{k}{n}]=(m+1)[x]+(n-m-1)([x]+1)=n[x]+n-m-1 \quad (1)$$

Αν γράψουμε $x=[x]+u$ *με* $0\leq u<1$ *τότε* $nx=n[x]+nu$ *άρα* $[nx]=n[x]+[nu]$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$[x+\frac{m}{n}]=[x]\Leftrightarrow[[x]+u+\frac{m}{n}]=[x]\Leftrightarrow[x]+[u+\frac{m}{n}]=[x]\Leftrightarrow[u+\frac{m}{n}]=0\Leftrightarrow$$

$$0\leq\frac{nu+m}{n}<1\Leftrightarrow nu<n-m.$$

Επίσης $[x+\frac{m+1}{n}]=[x]+1\Leftrightarrow[u+\frac{m+1}{n}]=1\Leftrightarrow 1\leq u+\frac{m+1}{n}<2\Leftrightarrow$

$n\leq nu+m+1<2\mathrm{n}\Leftrightarrow n-m-1\leq nu<n-m$ άρα $[nu]=n-m-1$ κι έτσι $[nu]=n[x]+n-m-1$ (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.