Κασαπίδης Γεώργιος

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2012

Ανακατώνουμε μια δέσμη απο 2ν δελτία έτσι ώστε η αρχική τους διάταξη 1,2,3,…,2ν-1,2ν να γίνει

ν+1,1,ν+2,2,…,2ν-1,ν-1,2ν,ν.

Αν συνεχίσουμε το ανακάτωμα κατα τον ίδιο τρόπο και αν ο 2ν+1 είναι πρώτος, να δειχτεί οτι τα δελτία επιστρέφουν στην αρχική τους θέση, μόλις αυτό συμβεί για ένα απο αυτά.

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΗΝΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Αν ένα δελτίο κατέχει την θέση χ_1 πριν το ανακάτωμα και την θέση χ_2 μετά το ανακάτωμα τότε απο τον ορισμό του ανακατώματος θα έχουμε:
Αν $\chi_1<\nu+1$ τότε $\chi_2=2\chi_1$ ενώ αν $\chi_1>\nu$ με $\chi_1=\nu+\lambda$ τότε $\chi_2=2\lambda-1$. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι $2\chi_1-(2\nu+1)=2\lambda-1=\chi_2$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν βλέπουμε οτι $\chi_2=2\chi_1 \bmod(2\nu+1)$.
Συνεχίζοντας κ φορές το ανακάτωμα ,το δελτίο χ_1 παίρνει την θέση $x_{k+1}=2^k x_1 \bmod(2\nu+1)$.
Αν υποθέσουμε οτι $\chi_{\kappa+1}=\chi_1$ τότε θα έχουμε $2\nu+1/\chi_1(2^\kappa-1)$. Επειδή υποθέσαμε οτι 2ν+1 είναι πρώτος θα ισχύει $2\nu+1/\chi_1$ ή $2\nu+1/2^\kappa-1$. Δεδομένου όμως οτι $\chi_1<2\nu+1$ θα ισχύει τελικά $2\nu+1/ 2^\kappa-1$. Προκύπτει συνεπώς οτι $2\nu+1/\psi(2^\kappa-1)$ για κάθε $\psi =1,2,...,2\nu$, δηλαδή $\psi=2^\kappa\psi \bmod(2\nu+1)$. Όπως είδαμε όμως παραπάνω αν ένα δελτίο κατάχει αρχικά την θέση ψ τότε μετά απο κ ανακατώματα για την θέση του ψ_κ ισχύει $\psi_\kappa=2^\kappa\psi \bmod(2\nu+1)$ κι έτσι $\psi=\psi_\kappa \bmod(2\nu+1)$. Αφού όμως $|\psi-\psi_\kappa|<2\nu+1$ θα έχουμε τελικά $\psi_\kappa=\psi$.