Να αποδειχτεί ότι $\frac{\pi}{2}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu}{2\nu-1}\frac{2\nu}{2\nu+1}$ (γινόμενο Wallis)

απόδειξη

Θέτουμε $A_\nu=\int_0^\pi sin^\nu x dx$. Τότε $A_0=\pi$, $A_1=2$ και για $\nu\geq 2$ έχουμε:

$A_\nu=\int_0^\pi sin^\nu x dx=\int_0^\pi sin^{\nu-1}x(-cosx)'dx=$

$[-sin^{\nu-1}xcosx]_0^\pi+\int_0^\pi(\nu-1)sin^{\nu-2}xcos^2xdx=$

$(\nu-1)\int_0^\pi sin^{\nu-2}xdx-(\nu-1)\int_0^\pi sin^\nu xdx$ κι έτσι προκύπτει η αναδρομική σχέση:

$A_\nu=\frac{\nu-1}{\nu}A_{\nu-2}$,$A_0=\pi$, $A_1=2$. Παρατηρούμε ότι

$A_{2\nu+1}=\frac{2\nu}{2\nu+1}\frac{2\nu-1}{2\nu-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot 2$ και $A_{2\nu}=\frac{2\nu-1}{2\nu}\frac{2\nu-3}{2\nu-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\pi$

$\frac{A_{2\nu}}{A_{2\nu+1}}=\frac{\prod_{\kappa=1}^{\nu}\frac{2\kappa-1}{2\kappa}}{\prod_{\kappa=1}^{\nu}\frac{2\kappa}{2\kappa+1}}\frac{\pi}{2}$ άρα $\frac{\pi}{2}=\frac{A_{2\nu}}{A_{2\nu+1}}\prod_{\kappa=1}^{\nu}\frac{2\kappa}{2\kappa+1}\frac{2\kappa}{2\kappa-1}$

Αφού $0\leq sinx\leq 1$ για κάθε $\chi\in[0,\pi/2]$ θα είναι

$0\leq A_{2\nu+1}\leq A_{2\nu}\leq A_{2\nu-1}$, συνεπώς $1\leq\frac{A_{2\nu}}{A_{2\nu+1}}\leq\frac{A_{2\nu-1}}{A_{2\nu+1}}=\frac{2\nu+1}{2\nu}$

Από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{\nu\to\infty}\frac{A_{2\nu}}{A_{2\nu+1}}=1$

κι έτσι προκύπτει ο τύπος του Wallis $\frac{\pi}{2}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu}{2\nu-1}\frac{2\nu}{2\nu+1}$