ΑΣΚΗΣΗ ΑΥΓΟΥΣΤΟΥ 2012

Έστω οι ακολουθίες $\alpha_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ και $\beta_n=\sqrt{4n+1}$. Να αποδειχτεί ότι: 1) $[\alpha_n]=[\beta_n]$ 2) $0<\beta_n-\alpha_n<\dfrac{1}{16n\sqrt{n}}$

απόδειξη

1) Ισχύει $\alpha_n<\beta_n$ αφού

$$\alpha_n^2<\beta_n^2 \Leftrightarrow 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<4n+2 \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1 \Leftrightarrow$$
$$4(n^2+n)<4n^2+4n+1 \Leftrightarrow 0<1.$$

Επίσης $\alpha_n^2>4n+1$ διότι

$$2n+1+2\sqrt{n(n+1)}>4n+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}>2n \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)}>n=\sqrt{n}\sqrt{n}$$

άρα $\alpha_n>\sqrt{4n+1}$. Τώρα $(\beta_n)^2=4n+2$,δηλαδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του $(\beta_n)^2$ με το 4 είναι ίσο με 2, πράγμα που σημαίνει ότι το $(\beta_n)^2$ δεν μπορεί να είναι τετράγωνο ακεραίου. (γιατί $\chi^2=0$ή1mod4). Επομένως θα είναι $[\beta_n]^2\leq 4n+1 \Leftrightarrow [\beta_n]\leq\sqrt{4n+1}$ (αν υπήρχε ακέραιος κ με $\sqrt{4n+1}<\kappa<\sqrt{4n+2}$ τότε $4n+1<\kappa^2<4n+2$ άτοπο)
Θα έχουμε λοιπόν $[\beta_n]\leq\sqrt{4n+1}<\alpha_n<\beta_n$ άρα $[\alpha_n]=[\beta_n]$.

2) $\beta_n-\alpha_n=\sqrt{4n+2}-(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}) =$

$$\frac{(\sqrt{4n+2}-\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$\frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$\frac{1}{(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})(\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} <$$

$$\frac{1}{(2n+1+2\sqrt{nn})(\sqrt{4n}+\sqrt{n}+\sqrt{n})}=\frac{1}{4\sqrt{n}(4n+1)}<\frac{1}{16n\sqrt{n}}$$

Άσκηση: Αν $0\leq\chi-\psi<1$ δείξτε ότι $[\chi]=[\psi]$ ή $[\chi]=[\psi]+1$