Κασαπίδης Γεώργιος

Αν ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\ldots+a_1z+a_0=0$ και για τους (μιγαδικούς) συντελεστές a_i ισχύει $|a_i|<m$, $m>0$ για κάθε $i=0,1,2,\ldots n-1$, να αποδειχτεί ότι $|\rho|<m+1$.

Απόδειξη

Έχουμε

$$\rho^n=-a_{n-1}\rho^{n-1}-\ldots-a_1\rho-a_0\Leftrightarrow$$

$$|\rho^n|=|-a_{n-1}\rho^{n-1}-\ldots-a_1\rho-a_0|\Leftrightarrow$$

$$|\rho|^n\leqslant|a_{n-1}||\rho|^{n-1}+\ldots+|a_1||\rho|+|a_0|\Leftrightarrow$$

$$|\rho|^n\leqslant|m||\rho|^{n-1}+\ldots+|m||\rho|+|m|\Leftrightarrow$$

$$|\rho|^n\leqslant|m|\left(|\rho|^{n-1}+\ldots+|\rho|+1\right)$$. Άρα θα είναι:

$$|\rho|^n-1<|\rho|^n\leqslant|m|\left(|\rho|^{n-1}+\ldots+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(|\rho|-1\right)\left(|\rho|^{n-1}+\ldots+1\right) \;<\; |m|\left(|\rho|^{n-1}+\ldots+1\right)\Leftrightarrow$$

$$|\rho|-1<|m|\Leftrightarrow|\rho|<|m|+1$$ ο.ε.δ.