

**Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων  $\chi\psi$  και συμβολίζουμε με  $S(n)$ , ( $n$  φυσικός), το πλήθος των σημείων με ακέραιες συντεταγμένες που απέχουν από το  $O$  απόσταση όχι μεγαλύτερη του  $n$ . Να υπολογίσετε το**

**όριο**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S(n)}{n^2}$

ΛΥΣΗ

Τα σημεία που απέχουν από το  $O$  απόσταση όχι μεγαλύτερη του  $n$ , ανήκουν στον κυκλικό δίσκο  $D$  με εξίσωση  $x^2+y^2=n$ . Για τα σημεία  $(x,y)$  με  $y>0$ , θα είναι  $y=\sqrt{n-x^2}$ . Για τον αριθμό  $S_n$  θα έχουμε:

$$S_n = (4n+1) + 4 \sum_{k=1}^{n-1} [\sqrt{n^2-k^2}] \quad (1) \text{ όπου } [a] \text{ παριστάνει το ακέραιο μέρος του αριθμού } a. \text{ (Ο όρος } 4n+1 \text{ μετράει τα σημεία που είναι πάνω στους άξονες συντεταγμένων, και το άθροισμα μας δίνει το πλήθος των σημείων που είναι εσωτερικά του κυκλικού δίσκου } D). \text{ Έτσι}$$

$\frac{S_n}{n^2} = \frac{4n+1}{n^2} + \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} [\sqrt{n^2-k^2}] \quad (2)$ . Είναι όμως γνωστό ότι

$$\frac{S_n}{n^2} = \frac{4n+1}{n^2} + \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} [\sqrt{n^2-k^2}] \quad (2).$$

$x-1 < [x] \leq x$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ . Συνεπώς

$$\frac{4n+1}{n^2} + \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{n^2-k^2} - 1) < \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{4n+1}{n^2} + \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2-k^2}.$$

Άρα

$$\frac{4n+1}{n^2} + \frac{4}{n} \left( \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} \right) - \frac{4(n-1)}{n^2} < \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{4n+1}{n^2} + \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \quad (3)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

Θεωρώντας μια διαμέριση του διαστήματος  $[0,1]$  σε  $n$  ισομήκη υποδιαστήματα και θεωρώντας τα δεξιά άκρα αυτών των υποδιαστημάτων, το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί από

---

το άθροισμα  $\Sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$  .

Επομένως θα είναι

$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \frac{\pi}{4}$  κι έτσι από τη σχέση (3) δεδομένου ότι οι ακραίες

παραστάσεις τείνουν και οι δυο στο  $\frac{\pi}{4}$  θα έχουμε τελικά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \pi.$$