Λύση της άσκησης Ιουλίου 2012

Έστω συνάρτηση f : $\mathbb{R}\rightarrow[0,+\infty)$ για την οποία έχουμε

1. **f(a)=0 $\Leftrightarrow$ |a|=0**
2. **f(ab)=f(a)f(b) για κάθε a,b $\in\mathbb{R}$**
3. **f(a)<1 $\Leftrightarrow$ |a|<1**

Να αποδειχτεί ότι υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε
f(x)=|x|$^{\lambda}$ για κάθε πραγματικό αριθμό χ.

απόδειξη

Από την (2) έχουμε f(α)=f(1α)=f(1)f(α). Αν λοιπόν α$\neq$0 προκύπτει ότι f(1)=1.
1=f(1)=f(α$\frac{1}{a}$)=f(α)f($\frac{1}{a}$) άρα $f(\frac{1}{a})=\frac{1}{f(a)}$ για κάθε α$\neq$0. Αυτό έχει ως συνέπεια να έχουμε $f(\frac{a}{b})=\frac{f(a)}{f(b)}$ για κάθε α,β $\in$R*.

Είναι τώρα $f(a)<f(b)\Leftrightarrow f(\frac{a}{b})<1\Leftrightarrow|\frac{a}{b}|<1\Leftrightarrow|a|<|b|$

Παρατηρούμε τώρα ότι $f(x)=|x|^{\lambda}\Leftrightarrow\log f(x)=\lambda\log|x|$. Αν χ$\neq$0 θα έχουμε
$\lambda=\frac{\log f(x)}{\log|x|}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η παράσταση $\frac{\log f(x)}{\log|x|}$ είναι σταθερή.

Θεωρούμε ξ με 0<|ξ|<1. Θέτουμε λ=$\frac{\log f(\xi)}{\log|\xi|}$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x)=|x|^{\lambda}$. Αφού f(0)=0 η ισότητα ισχύει για χ=0. Έστω λοιπόν χ≠0.

Θα δείξουμε ότι $\frac{\log f(x)}{\log|x|}=\frac{\log f(\xi)}{\log|\xi|}\Leftrightarrow\frac{\log f(x)}{\log f(\xi)}=\frac{\log|x|}{\log|\xi|}$

Θεωρούμε ρητό αριθμό $\frac{m}{n}$ έτσι ώστε

$$\frac{m}{n}<\frac{\log f(x)}{\log f(\xi)}\Leftrightarrow m\log f(\xi)>n\log f(x)$$

$\Leftrightarrow \log(f(\xi))^m > \log(f(x))^n \Leftrightarrow f(\xi)^m > f(x)^n$

$\Leftrightarrow f(\xi^m) > f(x^n) \Leftrightarrow |\xi^m| > |x^n| \Leftrightarrow |\xi|^m > |x|^n \Leftrightarrow$

$m\log|\xi| > n\log|x| \Leftrightarrow \frac{m}{n} < \frac{\log|x|}{\log|\xi|}$

Όμοια προκύπτει ότι αν $\frac{m}{n} > \frac{\log f(x)}{\log f(\xi)}$ *τότε* $\frac{m}{n} > \frac{\log|x|}{\log|\xi|}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\frac{\log f(x)}{\log f(\xi)} = \frac{\log|x|}{\log|\xi|}$ οπότε

$\frac{\log f(x)}{\log|x|} = \frac{\log f(\xi)}{\log|\xi|}$ =λ κι έτσι τελικά f(χ)=|χ|$^{\lambda}$

παρατήρηση 1:

αν για κάθε ρητό $\frac{m}{n}$ *ισχύει* $\frac{m}{n} < a \Leftrightarrow \frac{m}{n} < b$ *και* $\frac{m}{n} \geq a \Leftrightarrow \frac{m}{n} \geq b$ τότε ισχύει α=b , γιατί αν α≠b τότε θα υπήρχε ρητός $\frac{m}{n}$ *τέτοιος ώστε* $\alpha < \frac{m}{n} < b$ πράγμα που θα αδύνατο σύμφωνα με τις αρχικές υποθέσεις μας.

παρατήρηση 2:

Ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός Εύδοξος ο Κνίδιος (408-355πΧ) έκανε χρήση της παραπάνω ιδέας στον περίφημο ορισμό του για τις αναλογίες.