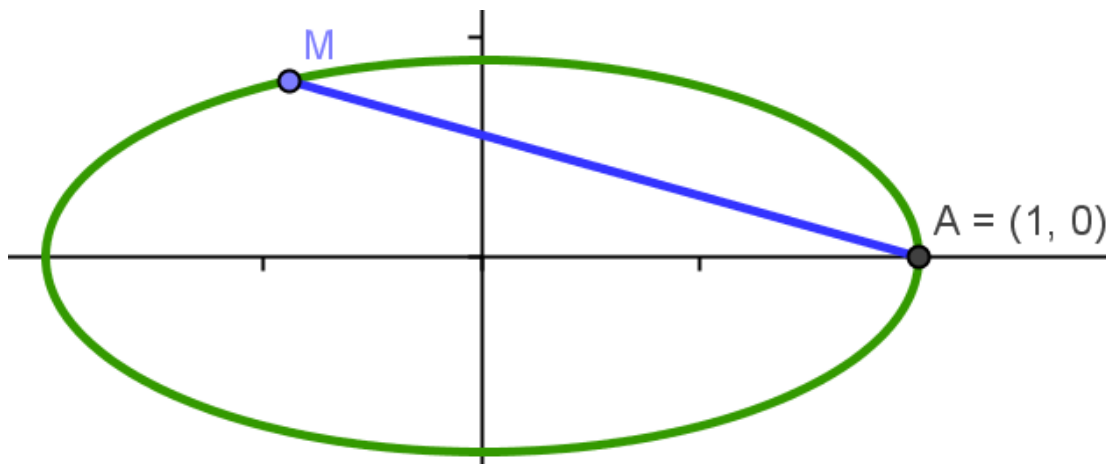


**Να βρεθούν όλα τα σημεία με ρητές συντεταγμένες πάνω στην έλλειψη  $x^2+5\psi^2=1$ .**

**Λύση**



Αν  $M(x,\psi)$  είναι σημείο με ρητές συντεταγμένες, τότε η κλίση της ευθείας  $AM$ , όπου  $A(1,0)$  το σημείο που η έλλειψη τέμνει τον άξονα  $x'x$ , είναι

$\frac{\psi}{x-1}$  και προφανώς είναι ρητός αριθμός. Αντίστροφα αν η κλίση της

ευθείας που διέρχεται από το  $A$  είναι ο ρητός αριθμός  $\rho$ , τότε η εξίσωσή

της θα είναι  $\psi=\rho(x-1)$ . Το σύστημα 
$$\begin{cases} \psi = \rho(x-1) \\ x^2 + 5\psi^2 = 1 \end{cases}$$

έχει επιλύουσα την εξίσωση  $(5\rho^2+1)x^2-10\rho^2x+5\rho^2-1=0$  (1).

Το γινόμενο των ριζών της είναι  $\frac{5\rho^2-1}{5\rho^2+1}$  και επειδή η μια ρίζα της είναι

ο αριθμός 1, η άλλη ρίζα της θα είναι η  $x = \frac{5\rho^2-1}{5\rho^2+1}$ . Έτσι θα είναι  $\psi =$

$\frac{-2\rho}{5\rho^2+1}$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα σημεία με ρητές

συντεταγμένες πάνω στη δοθείσα έλλειψη είναι το σημείο

$A(1,0)$  και όλα τα σημεία  $(\chi,\psi)=\left(\frac{5\rho^2-1}{5\rho^2+1}, \frac{-2\rho}{5\rho^2+1}\right)$  με  $\rho \in \mathbb{Q}$  .