ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Κάποιες αξιοσημείωτες ιδιότητες των οριζουσών

Έστω Α, Β δυο πίνακες ν×ν. Με A_i/B_j συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει με αντικατάσταση της i στήλης του Α με την j στήλη του Β. Γενικότερα με $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}/B_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ θα συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει με αντικατάσταση των $i_1,i_2,\ldots i_k$ στηλών του πίνακα Α με τις $j_1,j_2,\ldots j_k$ στήλες αντίστοιχα του πίνακα Β.
Παράδειγμα

Αν $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}11&23&32\\41&-5&60\\27&28&29\end{bmatrix}$ τότε

$A_2/B_3=\begin{bmatrix}1&32&3\\4&60&6\\7&29&9\end{bmatrix}$ και $A_{13}/B_{12}=\begin{bmatrix}11&2&23\\41&5&-5\\27&8&28\end{bmatrix}$.

Αν $A=(\alpha_{ij})$ και $B=(\beta_{ij})$ και με $A_1,A_2,\ldots A_\nu$ συμβολίσουμε τις αντίστοιχες στήλες του πίνακα Α τότε θα συμφωνήσουμε να γράφουμε $A=(A_1,A_2,\ldots A_\nu)$ και παρόμοια για τον πίνακα $B=(B_1,B_2,\ldots B_\nu)$.

Ως γνωστόν το γινόμενο των πινάκων ΑΒ είναι ο πίνακας $\Gamma=(\gamma_{ij})$ όπου $\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_{ik}\beta_{kj}$.

Αν υποθέσουμε ότι $\Gamma=(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots\Gamma_\nu)$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $\Gamma_j=\sum_{k=1}^{\nu}A_k\beta_{kj}$ (1).

Επίσης είναι γνωστό ότι η ορίζουσα έχει την γραμμική ιδιότητα ως προς μια στήλη, δηλαδή
$|(A_1,A_2,\ldots,A_\kappa+A'_\kappa \ldots A_\nu)|=|(A_1,A_2,\ldots A_\kappa,\ldots,A_\nu)|+(A_1,A_2,\ldots A'_\kappa,\ldots,A_\nu)|$ και
$|(A_1,A_2,\ldots\lambda A_\kappa,\ldots,A_\nu)|=\lambda|(A_1,A_2,\ldots A_\kappa,\ldots,A_\nu)|$.
Τέλος είναι γνωστό ότι η τιμή της ορίζουσας είναι μηδενική όταν δυο στήλες του πίνακα είναι ίσες, γεγονός το οποίο σε συνδυασμό με την γραμμική ιδιότητα σημαίνει ότι η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο όταν εναλλάξουμε τη θέση δυο στηλών του πίνακα.

Θεώρημα 1: $|A_i/(AB)_j|=\beta_{ij}|A|$

<u>Απόδειξη</u>

$|A_i/(AB)_j|=|(A_1,A_2,\ldots A_{i-1},\Gamma_j,A_{i+1},\ldots,A_\nu)|=(A_1,A_2,\ldots,\sum_{k=1}^{\nu}A_k\beta_{kj},\ldots,A_\nu)|=$

$$\sum_{k=1}^{\nu}|(A_1,A_{2,\ldots},A_\kappa\beta_{kj},\ldots,A_\nu)| = \sum_{k=1}^{\nu}\beta_{kj}|(A_1,A_{2,\ldots},A_\kappa,\ldots,A_\nu)| =\beta_{ij}|(A_1,A_2,\ldots A_i,\ldots,A_\nu)|=\beta_{ij}|A|.$$

Πόρισμα 1: Αν ο Α πίνακας είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=(\gamma_{ij})$, τότε $\gamma_{ij}=\frac{|A_i/I_j|}{|A|}$ όπου Ι ο μοναδιαίος πίνακας.

Απόδειξη

Αρκεί στον τύπο του θεωρήματος 1, να θέσουμε όπου $B=A^{-1}$ και να θεωρήσουμε τη σχέση $AA^{-1}=I$.

Θεώρημα 2: $\boldsymbol{|A_{\kappa\lambda}/(AB)_{ij}|=\begin{vmatrix}\beta_{\kappa i} & \beta_{\kappa j}\\ \beta_{\lambda i} & \beta_{\lambda j}\end{vmatrix}|A|}$

Απόδειξη

$|A_{\kappa\lambda}/(AB)_{ij}|=|(A_1,A_2,\ldots,\Gamma_i,\ldots,\Gamma_j,\ldots,A_\nu)|$ όπου οι στήλες Γ_i, Γ_j βρίσκονται στις θέσεις κ, λ των στηλών του πίνακα Α.

$$|A_{\kappa\lambda}/(AB)_{ij}|=|(A_1,A_2,\ldots,\sum_{\rho=1}^{\nu}A_\rho\beta_{\rho i},\ldots,\sum_{\mu=1}^{\nu}A_\mu\beta_{\mu j},\ldots,A_\nu)| =$$

$$\sum_{\rho=1}^{\nu}\sum_{\lambda=1}^{\nu}|(A_1,A_2,\ldots,A_\rho\beta_{\rho i},\ldots A_\mu\beta_{\mu j},\ldots,A_\nu)| = \sum_{\rho=1}^{\nu}\sum_{\lambda=1}^{\nu}\beta_{\rho i}\beta_{\mu j}|(A_1,A_2,\ldots,A_\rho,\ldots A_\mu,\ldots,A_\nu)|$$

Οι μόνοι μη μηδενικοί όροι στο παραπάνω άθροισμα προκύπτουν για τις τιμές ρ=κ, μ=λ και ρ=λ, μ=κ αντίστοιχα. Έτσι τελικά θα έχουμε $|A_{\kappa\lambda}/(AB)_{ij}|=(\beta_{\kappa i}\beta_{\lambda j}-\beta_{\lambda i}\beta_{\kappa j})|A|$ που είναι η ζητούμενη σχέση.

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Όπως τονίσαμε και παραπάνω η ορίζουσα έχει την γραμμική ιδιότητα ως προς κάθε στήλη, είναι όπως λέμε μια πολυγραμμική μορφή. Αν λάβουμε υπόψιν την ιδιότητα της πολυγραμμικότητας και τον συμβολισμό που υιοθετήσαμε στο παρόν άρθρο μπορούμε εύκολα να δικαιολογήσουμε έναν τύπο για την ορίζουσα του αθροίσματος δυο πινάκων.

Θεώρημα 3: Έστω οι $\nu\times\nu$ πίνακες Α και Β, τότε

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+\sum_{0<i_1<i_2<i_3<\dots<i_k<\nu}|\boldsymbol{A}_{i_1 i_2\dots i_k}/\boldsymbol{B}_{i_1 i_2\dots i_k}|$$

Το άθροισμα του παραπάνω τύπου περιλαμβάνει όλες τις ορίζουσες που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε τις στήλες του πίνακα Α με τις αντίστοιχες στήλες του Β διατηρώντας τη διάταξη των στηλών. Ένα παράδειγμα θα ξεκαθαρίσει το γεγονός.

Έστω λοιπόν ότι Α=(A_1,A_2,A_3) και Β=(B_1,B_2,B_3). Τότε:

$$|A+B|=|A|+|B|+|(B_1,A_2,A_3)|+|(A_1,B_2,A_3)|+|(A_1,A_2,B_3)|+|(B_1,B_2,A_3)|+|(B_1,A_2,B_3)|+|(A_1,B_2,B_3)|$$

Με $\sum(A/B)^+$ θα συμβολίζουμε το άθροισμα που προκύπτει με αντικατάσταση αρτίου πλήθους στηλών του Α από τις αντίστοιχες στήλες του Β ενώ με $\sum(A/B)^-$ θα συμβολίζουμε το άθροισμα που προκύπτει με αντικατάσταση περιττού πλήθους στηλών του Α από τις αντίστοιχες στήλες του Β, όπου το πλήθος κ των στηλών που αντικαθιστούμε είναι 0<κ<ν. Με αυτή τη σύμβαση ο τύπος του θεωρήματος 3 γίνεται $|A+B|=|A|+|B| + \sum(A/B)^+ + \sum(A/B)^-$ (3)

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$$\sum(A/-B)^+ = \sum(A/B)^+ \quad \text{και} \quad \sum(A/-B)^- =- \sum(A/B)^- \quad (4)$$

Πράγματι για κάθε επιμέρους ορίζουσα που είναι όρος στα παραπάνω αθροίσματα είναι

$$|A_{i_1 i_2\dots i_k}/-B_{i_1 i_2\dots i_k}|=(-1)^\kappa|A_{i_1 i_2\dots i_k}/B_{i_1 i_2\dots i_k}|$$

Το θεώρημα 3 σε συνδυασμό με τις προηγούμενες παρατηρήσεις οδηγούν στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4: Αν Α, Β είναι πίνακες $\nu\times\nu$, τότε

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=2|\boldsymbol{A}|+(1+(-1)^\nu)|\boldsymbol{B}|+2\sum(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B})^+$$

Πόρισμα 2: Αν Α, Β είναι πίνακες $\nu\times\nu$ με στοιχεία ακεραίους, τότε $|A+B|\equiv|A-B| \mod 2$

Πόρισμα 3: Αν Α πίνακας 3×3, τοτέ $|A+I|+|A-I|=2(|A|+Tr(A))$ όπου Tr(A) το ίχνος του Α.