Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά Τάξη: Γ΄

Δράμα 07 Απριλίου 2019

Θέμα Α

A_1. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα Δ με συνεχή παράγωγο στο Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν α,β με α<β στοιχεία του Δ και Α ο αριθμός που ορίζεται από τη σχέση $f(\beta)=f(\alpha)+f'(\alpha)(\beta-\alpha)+A(\beta-\alpha)^2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $A=\frac{f''(\xi)}{2}$.

A_2. Έστω f , ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0,1] με f(0) = f(1) = 0 και $|f''(x)|\le 1$ για κάθε $\chi\in[0,1]$.

Δείξτε ότι ισχύει $|f(x)|\le\frac{1}{8}$ για κάθε $\chi\in[0,1]$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

A_1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+f'(x)(\beta-x)+A(\beta-x)^2$, $x\in[\alpha,\beta]$.
Η h είναι συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β). Επίσης $h(\alpha)=f(\alpha)+f'(\alpha)(\beta-\alpha)+A(\beta-\alpha)^2=f(\beta)$ και $h(\beta)=f(\beta)$. Επομένως σύμφωνα με το θ.Rolle θα υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $h'(\xi)=0$.
Όμως $h'(x)=f'(\chi)+f''(x)(\beta-x)-f'(x)-2A(\beta-x)=f''(x)(\beta-x)-2A(\beta-x)$.
Έτσι από την $h'(\xi)=0$ και επειδή ξ<β προκύπτει ότι $A=\frac{f''(\xi)}{2}$

A_2. Για α=0 και β=x από το (A_1) ερώτημα έχουμε για Δ=[0,1]: $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$ με ξ∈(0,x). (1) Αφού f(0)=0=f(1) θα έχουμε $f'(0)+\frac{f''(\xi)}{2}=0$ και συνεπώς ,$f(x)=-\frac{f''(\xi)}{2}x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$ ή $f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(-x+x^2)$ οπότε $|f(x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2}\right||x-x^2|\le\frac{1}{2}x(1-x)$. (2)
Αν $g(x)=\frac{1}{2}x(1-x)$ τότε $g'(x)=\frac{1}{2}(1-2x)$. Η παράγωγος $g'(x)$ μηδενίζεται για $x=\frac{1}{2}$ και είναι $g'(x)>0$ για $0<x<\frac{1}{2}$ και $g'(x)<0$ για $\frac{1}{2}<x<1$. Έτσι η g παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x=\frac{1}{2}$ και είναι $g(x)\le g(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$ για κάθε x∈[0,1]. Άρα από την (2) $|f(x)|\le\frac{1}{8}$ για κάθε x∈[0,1].

Θέμα Β

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ για την οποία ισχύει $f(\ln f'(x))=1$.

B_1. Να δειχθεί ότι η f(x) είναι 1-1.

B_2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει α>0 ώστε $f(x)=a\cdot x+1-a\ln a$ για κάθε $x\in R$.

B_3. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(f(e^x)-f(1)\right)^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$.

B₄. Να βρείτε πόσες συναρτήσεις f υπάρχουν, αν $f(1)=\frac{3}{2}$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

B₁) Αφού $f'(x)>0$ στο R άρα είναι αύξουσα οπότε είναι 1-1.

B₂) Αφού f είναι 1-1 άρα έχουμε,

$lnf'(x)=f^{-1}(1) \Leftrightarrow f'(x)=e^{f^{-1}(1)} \Leftrightarrow f(x)=e^{f^{-1}(1)}x+c$ (1)

η οποία έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x)=\frac{x-c}{e^{f^{-1}(1)}}$. Για χ=1 έχουμε ότι $f^{-1}(1)=\frac{1-c}{e^{f^{-1}(1)}} \Leftrightarrow c=1-f^{-1}(1)e^{f^{-1}(1)}$ και αν θέσουμε $\alpha=e^{f^{-1}(1)}$ θα είναι $f^{-1}(1)=lna$ οπότε η σχέση (1) γίνεται $f(x)=ax+1-alna$

B₃) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(f(e^x)-f(1)\right)^2 e^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{f(e^x)-f(e^0)}{x-0}\right)^2 x^2 e^{\frac{1}{x}}\right]$

Έστω $g(x)=f(e^x)$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(e^x)-f(e^0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$ άρα,

$g'(x)=e^x f'(e^x)$ και $g'(0)=e^0 f'(e^0)=\beta>0$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-2\frac{1}{x^3}}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=$

$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(f(e^x)-f(1)\right)^2 e^{\frac{1}{x}}\right]=\beta^2(+\infty)=+\infty$

B₄) Αν $f(1)=\frac{3}{2}$ τότε $f(1)=\alpha+1-a\ln a \Leftrightarrow \alpha-\alpha lna-\frac{1}{2}=0$

Θέτω $K(x)=x-xlnx-\frac{1}{2}$ με ΠΟ=(0, +∞) και παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $K'(x)=1-lnx-1=-lnx$ που έχει κρίσιμο σημείο για x=1.Για x>1 έχουμε $K'(x)<0$ και για x<1 έχουμε $K'(x)>0$ οπότε στο χ=1 παρουσιάζει μέγιστο. Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}x-xlnx-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}xlnx=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}-x=0$. Ακόμη $\lim\limits_{x\to +\infty}x-xlnx-\frac{1}{2}=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}x-xlnx=\lim\limits_{x\to +\infty}x(1-lnx)=+\infty(-\infty)=-\infty$

Οπότε όταν x<1 τότε $-\frac{1}{2}<f(x)\le\frac{1}{2}$ άρα $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Και για x>1 τότε f(x)∈ $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ άρα και εδώ έχουμε μια ακόμα ρίζα οπότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες ακριβώς άρα υπάρχουν μόνο 2 συναρτήσεις.