Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά Τάξη: Α΄

Δράμα 18 Μαρτίου 2018

Θέμα Α

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda^2+1)\cdot x + (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2 = 0 \quad \lambda \in R - \{0\}$ (1).

Α$_1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση **(1)** έχει δύο ρίζες άνισες πραγματικές.

Α$_2$. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης **(1).**

Α$_3$. Να δείξετε ότι η ανίσωση $\lambda^2 \cdot \mathrm{S} - \mathrm{P} - 16\cdot\lambda^2 < -37$, με S και P το άθροισμα και γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της **(1)** είναι αδύνατη στο R, $\lambda \in R - \{0\}$.

Α$_4$. Αν λ = 2 και χ_1 είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης **(1),**
να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = 100\cdot\sqrt{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt[3]{x_1^2}\cdot\sqrt[6]{x_1^8}+13}+418$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Α$_1$.

$$\Delta = \left[-2(\lambda^2+1)\right]^2 - 4(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2 = 4(\lambda^2+1)^2 - 4\left[(\lambda+1)(\lambda-1)\right]^2 = 4[(\lambda^2+1)^2 - (\lambda^2-1)^2]$$

$4(\lambda^2+1+\lambda^2-1)(\lambda^2+1-\lambda^2+1) = 4(2\lambda^2)2 = 16\lambda^2 > 0$ αφού $\lambda \neq 0$.

Α$_2$.

$$x_{1,2} = \frac{-\left[-2(\lambda^2+1)\right] \pm \sqrt{16\lambda^2}}{2} = \frac{2\lambda^2+2\pm4\lambda}{2} = \frac{2(\lambda^2+1\pm2\lambda)}{2} = \begin{cases}(\lambda+1)^2\\(\lambda-1)^2\end{cases}$$

Α$_3$.

$S = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-2(\lambda^2+1)}{1} = 2\lambda^2+2$ και $P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{(\lambda^2-1)^2}{1} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$. Άρα

$$\lambda^2\cdot\mathrm{S} - \mathrm{P} - 16\cdot\lambda^2 < -37 \Leftrightarrow \lambda^2(2\lambda^2+2) - (\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1) - 16\lambda^2 + 37 < 0 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4 + 2\lambda^2 - \lambda^4 + 2\lambda^2 - 1 - 16\lambda^2 + 37 < 0 \Leftrightarrow$$

$\lambda^4 - 12\lambda^2 + 36 < 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-6)^2 < 0$, αδύνατη στο R.

Α$_4$. Για λ = 2 έχουμε αντίστοιχα ρίζες , $\chi_1 = 9$ και $\chi_2 = 1$. Επομένως για $\chi_1 = 9$ η παράσταση Α γίνεται: $\mathrm{A} = 100\cdot\sqrt{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt[3]{x_1^2}\cdot\sqrt[6]{x_1^8}+13}+418 =$

$$100\cdot\sqrt{\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{9^2}\cdot\sqrt[6]{9^8}+13}+418 = 100.\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{9^2}\cdot\sqrt[3]{9^4}+13}+418 =$$

$$100\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{9^6}+13}+418 = 100.\sqrt{3\cdot9^2+13}+418 =$$

$$100.\sqrt{243+13}+418 = 100\cdot\sqrt{256}+418 = 100\cdot16+418 = 1600+418 = 2018$$

Θέμα Β

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΓΔ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω Ε σημείο της ΑΔ ώστε $E\hat{\Gamma}\Delta = \frac{1}{2}A\hat{B}M$ και Ζ σημείο στην προέκταση της ΓΔ ώστε $\widehat{ZE\Delta} = \widehat{ABM}$. Να δείξετε ότι:

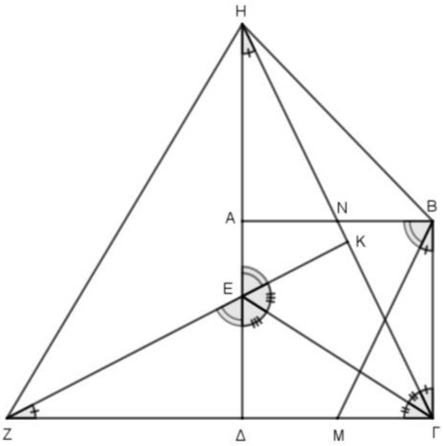
Β₁. ΓΝ = ΒΜ

Β₂. ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $N\hat{\Gamma}\Delta$

Β₃. ΖΕ είναι κάθετη στην ΓΝ.

Β₄. ΖΕ = ΑΕ + ΑΒ

Β₅. 2ΒΜ = ΓΖ



ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Β₁. Το ΝΒΓΜ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διότι έχει $BN =\parallel \Gamma M$ και $\hat{B} = 90^o$. Άρα και οι διαγώνιές του είναι ίσες. Αλλιώς: Τα τρίγωνα ΒΓΝ και ΒΓΜ είναι ίσα. (ορθογώνια, ΒΓ κοινή και ΒΝ=ΓΜ ως μισά ίσων τμημάτων). Άρα ΒΜ=ΓΝ.

Β₂. Έστω $\widehat{ABM} = 2\cdot\varphi$ και άρα από υπόθεση $\widehat{E\Gamma\Delta} = \varphi$.

Έστω $\widehat{MB\Gamma} = \omega$. Από 1ο ερώτημα και την ισότητα των τριγώνων ΒΓΝ και ΒΓΜ και $\widehat{B\Gamma N} = \omega$. Τότε $\widehat{ABM} = \widehat{N\Gamma M} = 2\cdot\varphi$ ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών.
Άρα $\widehat{N\Gamma E} = \varphi$ και ΓΕ διχοτόμος της $\widehat{N\Gamma\Delta}$.

Β₃. Έστω ότι η προέκταση της ΖΕ τέμνει την ΓΝ στο σημείο Κ και ότι $\widehat{MB\Gamma} = \omega$. Τότε και $\widehat{\Delta ZE} = \omega$ ως συμπληρωματική της $\widehat{ZE\Delta} = 2\cdot\varphi$.

Τελικά στο τρίγωνο ΖΚΓ : $\widehat{EZ\Delta} + \widehat{Z\Gamma K} = \omega + 2\cdot\varphi = 90^o$. Οπότε $\hat{K} = 90^o$, το ζητούμενο.

Β₄. Προεκτείνουμε την ΕΑ κατά ΑΗ=ΑΒ. Άρα ΑΕ+ΑΒ=ΑΕ+ΑΗ=ΕΗ. Αρκεί να δείξουμε ότι ΕΖ=ΕΗ. Τα τρίγωνα ΔΖΕ και ΚΕΗ είναι ίσα. (ορθογώνια, ΕΔ=ΕΚ διότι το Ε σημείο της διχοτόμου της $\widehat{N\Gamma\Delta}$ και $\widehat{ZE\Delta} = \widehat{KEA}$ ως κατακορυφήν. Άρα ΕΖ=ΕΗ. Το ζητούμενο.

Β₅. Το ΑΗΒΓ είναι παραλληλόγραμμο διότι $AH =\parallel B\Gamma$. Επειδή Ν μέσο της διαγωνίου του ΑΒ, θα είναι και μέσο της ΓΗ. Οπότε ΒΜ=ΓΝ=ΝΗ και άρα $2BM = \Gamma H$. Τελικά αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma H = \Gamma Z$.

<u>1ος τρόπος.</u> Έστω $\widehat{\Gamma E\Delta} = \widehat{\Gamma EK} = \theta$. Τα τρίγωνα ΓΕΔ και ΓΕΚ είναι ίσα. Άρα τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΓΕΗ είναι ίσα. (ΓΕ κοινή, ΕΖ=ΕΗ και $\widehat{\Gamma EZ} = \widehat{\Gamma EH} = 2\cdot\varphi + \theta$).
Οπότε $\Gamma H = \Gamma Z$, το ζητούμενο.

<u>2ος τρόπος.</u> Από 4ο ερώτημα τα τρίγωνα ΔΖΕ και ΚΕΗ είναι ίσα. Άρα $KH = \Delta Z$. Επίσης $\Gamma\Delta = \Gamma K$ διότι τα τρίγωνα ΓΕΔ και ΓΕΚ είναι ίσα. Άρα $\Gamma H = \Gamma Z$ ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.