ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β' ΕΚΔΟΣΗ:10/01/2012

ΜΙΑ ΣΥΛΛΟΓΗ

30 ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΜΟΝΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

+ 10 ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει: $\mathrm{Re}\left(z+\frac{4}{z}\right)=2\mathrm{Re}(z),\ (1)$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

β. Αν $\mathrm{Re}(z)\neq 0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w=z+\frac{4}{z}$ είναι πραγματικός και ισχύει $-4\leq w\leq 4$.

ii. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $c=z+3+4i$.

γ. Για το προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο του $|c|$.

δ. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 και z_3 ικανοποιούν την σχέση (1) και δεν είναι φανταστικοί, να αποδείξετε ότι

$$|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=2|z_1+z_2+z_3|$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Αν ισχύει η σχέση $z\overline{z}+3(z-\overline{z})i=4(z+\overline{z}), z\in C$ (1) :

α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z|$ καθώς και τον μιγαδικό z_1 με το μέγιστο μέτρο

γ. Να προσδιορίσετε τα $\beta,\gamma\in R$,ώστε ο μιγαδικός z_1 να είναι λύση της εξίσωση $\frac{1}{4}z^2+\beta z+\gamma=0$

δ. Αν για τον μιγαδικό z_0 που ικανοποιεί την σχέση (1), ισχύει $\left(\frac{\overline{z_0}-4+3i}{\overline{w-5i}}\right)^{2012}=5^{2012}, w\neq 5i$, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $\Lambda(0,5)$ και ακτίνας $\rho_2=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (από Δημήτρη Ιωάννου)

Έστω $z \in C$, με $|z|=1$ και $|z+1|=a$, όπου $a \in R$. Να αποδείξετε ότι :

α. $0 \le a \le 2$

β. $Re(z)=\dfrac{a^2-2}{2}$

γ. $|z^2-z+1|=|a^2-3|$

δ. $\sqrt{3}-a \le |z^2-z+1| \le \dfrac{13}{4}-a$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (από pito)

Έστω οι μιγαδικοί z,w με τις ιδιότητες $|z|^2+z\overline{w}=1, |w|^2+\overline{z}w=3$.

α. Να δείξετε ότι $|z+w|=2$.

β. Να δείξετε ότι οι εικόνες των z και w ανήκουν σε κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων , των οποίων να βρείτε και την ακτίνα.

γ. Να βρείτε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w.

δ. Να δείξετε ότι οι εικόνες των z,w και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

ΑΣΚΗΣΗ 5 (από dennys)

Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $z^2-2(\cos t)z+(5-4\sin t)=0, t\in[0,\pi]$. Να βρεθούν :

α. οι ρίζες z_1, z_2 και ο γεωμετρικός τόπους αυτών

β. το μέγιστο του $|z_1-z_2|$

γ. το μέγιστο του $|z_1+z_2|$

ΑΣΚΗΣΗ 6 (από dennys)

Δίνεται $z=t+(t-1)i, t\in[0,1]$. Να βρεθούν

α. ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z

β. το ελάχιστο $|z|$

Αν $w=(k^2+2)+(k^2-1)i, k\in\mathbb{R}$, Να βρεθούν :

γ. ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w

δ. το ελάχιστο $|w|$

ε. το ελάχιστο $|z-w|$

στ. οι μέγιστες τιμές των $|w|$ και $|z-w|$ όταν $k\in[0,4]$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

α. Να λυθεί η εξίσωση $w^2+w+1=0$

β. Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $z_1^2+z_1 \cdot z_2+z_2^2=0$

i. Να αποδείξετε ότι: $|z_1|=|z_2|$

ii. Να αποδείξετε ότι: $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$

iii. Για $\nu \in \mathrm{N}^*$ και $z_1^\nu+z_2^\nu \neq 0$, να αποδείξετε ότι ο $u=\dfrac{z_1^\nu-z_2^\nu}{z_1^\nu+z_2^\nu}$ είναι φανταστικός.

Πηγή: Κ.Ρεκούμης- Κ.Λαγός (εκδόσεις Μεταίχμιο)

ΑΣΚΗΣΗ 8 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με εικόνες αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία A, B, Γ, για τους οποίους ισχύει: $z_1+2z_2=3z_3$ και $|z_1|=|z_3|=1, |z_2|=\sqrt{2}$

α. Να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=0$

β. i. Να δείξετε ότι $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

γ. Να υπολογίσετε $\mathrm{Re}(z_2\overline{z_3})$ καθώς και $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_3})$

δ. i. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

ii. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις $A\Gamma$ και $\mathrm{B}\Gamma$

Πηγή: Χ.Πατήλας (εκδόσεις Κωστόγιαννος)

ΑΣΚΗΣΗ 9 (από Γιάννη Σταματογιάννη)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=a+bi, z_2=c+di$ όπου a,b,c,d θετικοί αριθμοί ώστε $|z_1|=|z_2|=1$.

Έστω η εξίσωση $x^2-2|z_1-z_2|x+2=0$ που έχει ρίζες x_1, x_2. Να δείξετε ότι :

α. Οι ρίζες x_1, x_2 δεν είναι πραγματικές .

β. Ισχύει $|x_1|=|x_2|=\sqrt{2}$

γ. Ισχύει $|x_1-x_2|^2+4|z_1-z_2|^2=8$

δ. Ο μιγαδικός $w=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$ είναι πραγματικός και να βρείτε τη μικρότερη τιμή του .

ΑΣΚΗΣΗ 10 (από Περικλή Παντούλα)

Θεωρούμε τον μιγαδικό $z = 6 + \sigma\upsilon\nu(\pi t) + \left[8 + \eta\mu(\pi t)\right]i,\ \mu\varepsilon\ t \geq 0$.

α. Να βρείτε το $|z - 6 - 8i|$.

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

γ. Να βρείτε την μικρότερη και την μεγαλύτερη απόσταση της εικόνας του z από την αρχή των αξόνων

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει $t \geq 0$, ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται στην διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων

ε. Για $t = 0$ να βρείτε τον $\lambda \in R$, ώστε ο $w = z + 1 + \dfrac{\lambda}{z+1}$ να είναι πραγματικός.

ΑΣΚΗΣΗ 11 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Δίνεται ο μιγαδικός $z = \dfrac{2(x+y)(1+i)}{x+yi}$ με $x, y \in R^*$.

α. Να δείξετε ότι $Re(z) = 2 \cdot \dfrac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 + y^2}$ και $Im(z) = 2 \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$.

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο κινείται η εικόνα του z.

γ. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού z.

δ. Να βρείτε τον μιγαδικό z με το μέγιστο μέτρο.

ΑΣΚΗΣΗ 12 (από pito)

Για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z-1| = |z^2 - 9z + 20|$ και έστω ότι $|z-4| = \lambda, \lambda > 0$.

α. Να δείξετε ότι :

i. $z + \overline{z} = \dfrac{|z|^2 + 16 - \lambda^2}{4}$

ii. $(1-\lambda^2)|z|^2 + (5\lambda^2 - 1)(z + \overline{z}) = 25\lambda^2 - 1$

iii. $|z| \geq 2$

β. Να βρείτε που κινείται η εικόνα του z.

γ. Να βρείτε το ελάχιστο μέτρο του z.

ΑΣΚΗΣΗ 13 (από Δημήτρη Ιωάννου)

Έστω $z, w \in C$ με $|z|^2(3i+4) + 5iz^2 = 0, |w|^2(4+3i) + 5iw^2 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι $|z+w|^2(4+3i) + 5i(z+w)^2 = 0$.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του q αν $q = \dfrac{1}{z} + 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 14 (από Δημήτρη Ιωάννου)

Έστω $z, w \in C$ με $zw = 1$.

Αν $a, b, c, d \epsilon R$ με $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 > 0$ και $a(z+\overline{z}) + ib(\overline{z} - z) + c(z\overline{z} - 1) + d(z\overline{z} + 1) = 0$,

να αποδείξετε ότι:

α. Η εικόνα του z διαγράφει κύκλο ή ευθεία

β. Αν η εικόνα του z διαγράφει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε η εικόνα του w διαγράφει ευθεία.

γ. Αν η εικόνα του z διαγράφει ευθεία που δεν περνάει από την αρχή των αξόνων, τότε η εικόνα του w διαγράφει κύκλο ο οποίος περνάει από την αρχή των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΗ 15 (από pito)

Έστω $a, \beta \in C^*$ και z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + az + \beta^2 = 0$.Να δείξετε ότι:

α. Αν $|a| = |\beta| = 1$ τότε $|z_1| \le 2$ και $|z_2| \le 2$.

β. Αν $|z_1| = |z_2|$, τότε ο αριθμός $\dfrac{a}{\beta}$ είναι πραγματικός.

γ. Αν $\dfrac{a}{2\beta} \in R$, και ο $\dfrac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός , να δείξετε ότι $|z_1| = |z_2|$

ΑΣΚΗΣΗ 16 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η εξίσωση $z = 2(\sqrt{2} - \dfrac{2}{z}), z \in C^*$ (1)

α. Να βρεθούν οι ρίζες z_1 και z_2 της (1)

β. Να βρεθούν οι θετικές ακέραιες τιμές του ν, για τις οποίες ισχύει η σχέση $z_1^\nu + z_2^\nu = 0$

γ. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y, που επαληθεύουν την ισότητα

$$\frac{1}{x+yi} + (-i)^{2011} = i^{-16} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2}$$

δ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $\left|z - z_1^2\right| = \left|z - z_2^4\right|$

ε. Να βρεθεί ο μιγαδικός z_0 που έχει το μικρότερο μέτρο.

στ. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του $\left|z + 7 - i\right|$.

ΑΣΚΗΣΗ 17 (από dennys)

Δίνεται ο μιγαδικός $z=(k-\eta\mu t)+(k-\sigma\upsilon\nu t)i$ με $t\in R$ και $k>1$.

α. Να βρείτε πού κινείται ο z.

β. Αν ο μιγαδικός w κινείται στην ευθεία $y=-x-(k-1)$, να βρείτε το k ώστε το $|z-w|_{min}=\frac{5\sqrt{2}}{2}-1$

γ. Για το k του (β) ερωτήματος βρείτε πού κινείται ο $\overline{z}$ και το ελάχιστο και μέγιστο του $|z-\overline{z}|$

δ. Για το k του (β) ερωτήματος βρείτε το $|w-3+4i|\,min$

ε. Αν ο μιγαδικός u με $u=(-1+m\eta\mu t)+(-1+m\sigma\upsilon\nu t)i$, να βρείτε για ποιά τιμή του m ο γεωμετρικός τόπος του u περνά από την αρχή των αξόνων.

στ. Για τα k,m του (β) και (ε) ερωτήματος, να βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο του $|z-u|$.

ΑΣΚΗΣΗ 18 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Έστω οι μιγαδικοί z, w με τις ιδιότητες $4|z|^2-2z\overline{w}=1, |w|^2-2z\overline{w}=3$.

α. Να δείξετε ότι $|2z-w|=2$.

β. Να δείξετε ότι οι εικόνες των z και w ανήκουν σε κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων, των οποίων να βρείτε και την ακτίνα.

γ. Να βρείτε το $|6z+w|$.

δ. Να βρείτε την μεγίστη και την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w.

ΑΣΚΗΣΗ 19 (από pito)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και $f(z)=\dfrac{i}{|z-2|-|z-1|}$

α. Να βρείτε για ποιους μιγαδικούς z ορίζεται ο $f(z)$.

β. Να δείξετε ότι $|f(z)|\geq 1$

γ. Αν $f(z)=i$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $|z-1|+Re(z)=1$

ii. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές το $Re(z)$.

iii. Να βρείτε που κινείται η εικόνα του z, όπου ο z είναι μιγαδικός που επαληθεύει την εξίσωση του ερωτήματος γ.i.

ΑΣΚΗΣΗ 20 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

α. Να κάνετε τις πράξεις $(z+3+i)(z-4+2i)$

β. Να λύσετε την εξίσωση $z^2-(1-3i)z-14+2i=0 \quad (1)$

γ. Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της (1) με $\mathrm{Re}(z_1)>0$ και A, B, Γ οι εικόνες των z_1, z_2 και $z_3=3+i$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο

δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $\mathrm{M}(z)$ που είναι εικόνες των μιγαδικών z και ικανοποιούν την σχέση $(MA)^2+2(MB)^2=2(M\Gamma)^2+30$

ΑΣΚΗΣΗ 21 (από pito)

Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z_1, z_2 ώστε αν $\dfrac{z_1}{z_2} = z$ να ισχύει $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}, Im(z) \geq 0$.

α. Να βρείτε τον μιγαδικό z.

β. Να βρείτε κάθε $\nu \in N^*$ ώστε να ισχύει $z_1^{2\nu} = z_2^{2\nu}$.

γ. Να δείξετε ότι $z^{95} + z^{94} + ... + z + 1 = 0$

δ. Αν η εικόνα του μιγαδικού z_2 κινείται πάνω στην ευθεία $y = 2x + 1$, να δείξετε ότι η εικόνα του z_1 κινείται σε ευθεία , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ε. Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, όπου O, A, B είναι οι εικόνες των μιγαδικών $0, z_1, z_2$ αντίστοιχα.

στ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου OAB του (ε) ερωτήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 22 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται ο μιγαδικός $z \in C - \{2i\}$ και η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z^3 + 8i}{z - 2i}$

α. Για $z \neq 2i$, να δείξετε ότι $f(z) = z^2 + 2iz - 4$

β. Να βρείτε το $|f(1+i)|$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = |z^2| + 2iz - 4$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 2iz + \overline{z} - 6$

ε. Αν $|z| = 1$, να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $f(z)$ είναι σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνας $\rho = 7$

ΑΣΚΗΣΗ 23 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει $(\overline{z})^{2005} z^{2008} = 1 \quad (1)$.

α. Να βρείτε το $|z|$

β. Να αποδείξετε ότι $\overline{z} = z^2$

γ. Να λύσετε την εξίσωση (1)

δ. Έστω μιγαδικός z με $\mathrm{Im}(z) > 0$, που είναι λύση της εξίσωσης (1) και ο μιγαδικός $w = \dfrac{\lambda + z}{\lambda - z}$ με $\lambda \in R$.

i. Να εκφράσετε το $|w|$ ως συνάρτηση του λ

ii. Να βρείτε το λ, ώστε ο w να έχει μέγιστο μέτρο

ΑΣΚΗΣΗ 24 (από pito)

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $Im(z_1) > 0$ ώστε $z_1 | z_2 | + z_2 | z_1 | = 40 (1)$ και $z_1 z_2 = 25 (2)$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z_1 και z_2.

β. Να βρείτε το μιγαδικό $w = z_1 - i$, ο οποίος έχει ελάχιστο μέτρο.

γ. Έστω $\nu \in N^*$ και ο μιγαδικός $z = z_1^\nu - z_2^\nu$. Να δείξετε ότι υπάρχουν μιγαδικοί z_1, z_2 ώστε ο z να είναι φανταστικός.

ΑΣΚΗΣΗ 25 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0, \alpha, \beta \in R$ που έχει ρίζες τις $z_1 = -\dfrac{2}{i}$ και z_2

α. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in R$ και την ρίζα z_2

β. Να βρείτε το $\nu \in R$, ώστε $z_1^\nu - z_2^\nu = -16i$

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει η σχέση $\left|z - z_1\right|^2 + \left|z - z_2\right|^2 = 16 \;\; (1)$

δ. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει η (1) , να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $\left|z - 4 - 4i\right|$

ΑΣΚΗΣΗ 26 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Δίνονται οι μιγαδικοί $z, w \neq 0$ αν $zw + \overline{zw} = 0$

α. Να δείξετε ο μιγαδικός $\left(\dfrac{z}{w}\right)^{2010}$ είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός .

β. Να δείξετε ότι η διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $\overline{z}, w$ τέμνονται κάθετα .

γ. Να δείξετε ότι $\left|\overline{z} - w\right| = \left|z + \overline{w}\right|$.

δ. Αν επιπλέον $\dfrac{z}{w} + \dfrac{w}{z} = 2i$

i. Να βρείτε την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού $\dfrac{z}{w}$ από το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$.

ii. Να βρείτε τον μιγαδικό $\left(\dfrac{z}{w}\right)^{2012}$.

ΑΣΚΗΣΗ 27 (από Μπάμπη Στεργίου)

Δίνονται οι μιγαδικοί z με την ιδιότητα : $1 + 2|z|^2 = |z^2 + 1|^2 + 2|z + 1|^2$

α. Να αποδείξετε ότι ο z δεν είναι πραγματικός.

β. Να αποδείξετε ότι $(z + \overline{z} + 1)^2 + (z\overline{z} - 1)^2 = 0$

γ. Να αποδείξετε ότι $z^2+z+1=0$

δ. Να βρείτε όλους τους μιγαδικούς z με τη δοσμένη ιδιότητα καθώς και το μέτρο τους .

ε. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=z^{2012}+z^{2014}+2013$

ΑΣΚΗΣΗ 28 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω ο μιγαδικός z με $z\neq 2i$ και η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z^2+4}{|z-2i|}$ (1)

α. Να βρείτε το $\mathrm{Im}(f(1+i))$

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει $f(z)\in R$

γ. Να δείξετε ότι $|f(z)|=|z+2i|$

δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει $|f(z-5i)|+|f(z+i)|=10$ (2)

ε. Για τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την (2), να βρείτε τους μιγαδικούς με το μέγιστο μέτρο

στ. Αν οι μιγαδικοί z_1 και z_2 ικανοποιούν την (2) , να δείξετε ότι $8\leq|z_1-z_2|\leq 10$

ΑΣΚΗΣΗ 29 (από Ηλία Καμπέλη)

Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2-\alpha z+9=0$, $\alpha\in R$ και $z_1, z_2\notin R$.

α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού α.

β. Να αποδείξετε ότι $\left(z_1^{17}+z_2^{17}\right)\in R$.

γ. Να βρείτε τα $|z_1|, |z_2|$.

δ. Αν $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=-2$ να βρείτε το α.

ε. Για $\alpha=0$ και $\mathrm{Im}(z_1)>0$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z-z_1|=4+|z-z_2|$.

ΑΣΚΗΣΗ 30 (από Στρατή Αντωνέα)

α. Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση :

$$z^3-3z^2+4z-2=0$$

β. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:

$$z^3+4z=3z^2+2 \quad \text{και} \quad z^{10}-32z+32=0$$

ΑΣΚΗΣΗ 31 (από Περικλή Παντούλα)

Έστω η συνάρτηση f, που είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, με $a>0$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό (a,b).

Έστω επιπλέον και οι μιγαδικοί: $z_1 = a + if(a) \quad \kappa\alpha\iota \quad z_2 = b + if(b)$

α. Αν ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (a,b)$, ώστε $f(x_1) = 0$

β. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί A και B, με $A \neq B$, ώστε: $Az_1\overline{z_2} + B\overline{z_1}z_2 = 100$. Να αποδείξετε ότι:

i. Ο μιγαδικός $z_1\overline{z_2}$ είναι πραγματικός

ii. Ισχύει $\dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b}$

iii. Υπάρχει $x_o \in (a,b)$, ώστε $f'(x_o) = \dfrac{f(x_o)}{x_o}$

iv. Υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ΑΣΚΗΣΗ 32 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to R$ με $f(\alpha) > \alpha > 0$ τέτοια ώστε, ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{\beta + if(\beta)}{\alpha - if(\alpha)}$ να είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β)

β. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 1$

γ. Αν η εξίσωση $f(x) = x$ έχει λύσεις στο διάστημα (α,β) τους αριθμούς x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΗ 33 (από Χρήστο Κανάβη)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (|z|x + 2)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, όπου $|z| = \rho > 0$ το μέτρο του μιγαδικού z.

α. i. Να βρεθεί ο θετικός αριθμός ρ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να εφάπτεται στο γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z, καθώς και

ii. το σημείο επαφής.

β. Να βρεθεί το διάστημα που ανήκει ο αριθμός ρ ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση f στο $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

γ. Έστω ο μιγαδικός $w = f(\sqrt{3}) - \dfrac{2}{\sqrt{3}} + (\sqrt{2|z|+1})\cdot i$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w

ΑΣΚΗΣΗ 34 (από Χρήστο Τσιφάκη)

Αν για τον μιγαδικό $z = x + yi$, ισχύει $\dfrac{2012Im(z)}{|z-1|^2} + \dfrac{1}{2}\left|2012 + 2012i\sqrt{3}\right| = 0$:

α. Να δειχθεί ότι η εικόνα $M(x, y)$ του z διαγράφει κύκλο του οποίου να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα.

β. Ποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς z έχει το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος ;

γ. Αν z είναι κάποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς, να δειχθεί ότι $Im(z) < 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 35 (από Κώστα Τηλέγραφο)

Δίνεται η f συνεχής στο R, $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in R$ με $\int_1^{|z|} f(x)dx = 0$ και f(1) = 1 .

α. Να δειχτεί ότι $f(x) > 0$

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των z.

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(|z+\overline{z}|-3\right)x^3 + x}{\left(|z-\overline{z}|-3\right)x^2 + x}$

δ. Αν το εμβαδόν της f με $x'x$ από τη $x = 0$ μέχρι τη $x = 1$ είναι μικρότερο του $|z + 2\overline{z}|$, να δειχτεί ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt = 3x^2 + 6x - 6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 36 (από Χρήστο Κανάβη)

Δίνεται η συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha^2 + if(\alpha)$ και $w = \beta^2 - if(\beta)$ με $\alpha \cdot \beta \neq 0$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) \neq 0$. Υποθέτουμε ότι $|\overline{w} + z| < |w - \overline{z}|$ και $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$. Να δειχθεί ότι

α. υπάρχει $x_0 \epsilon (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$

β. υπάρχει $x_1 \epsilon (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_1) = f(\gamma)$

ΑΣΚΗΣΗ 37 (από Χρήστο Κανάβη)

α. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει $|z_1 + \overline{z}_2| \leq |\overline{z}_1 - z_2|$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $w = z_1 \cdot z_2$.

β. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 1 + i\alpha^{f(x)}$ και $z_2 = \left(1 + f(x)\right) + i$ που ικανοποιούν τη σχέση του ερωτήματος (α) και f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με $f(0) = 0$ και $f'(0) \neq 0$.

Να δειχθεί ότι $2 < \alpha < 3$

γ. Αν για τη συνάρτηση g με τύπο $g\left(x\right)=Im(z_1 z_2)$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο $\left[\gamma,\delta\right]$ να δείξετε ότι

$$\frac{e^{f(\gamma)}}{e^{f(\delta)}}=\frac{1+f\left(\delta\right)}{1+f\left(\gamma\right)},\quad f\left(\gamma\right)\neq -1$$

ΑΣΚΗΣΗ 38 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Η συνάρτηση $f : R \to R$ είναι συνεχής και η γραφική παράστασή της διέρχεται από το σημείο $A(0,-2)$.

Δίνονται ακόμα οι μιγαδικοί αριθμοί $z=f(x)+f(x)i$ και $w=f(x)-f^2(x)i$ με $\left|z\right|=\sqrt{2}\cdot(e^x+1)$

α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για κάθε $x\in R$.

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\mathrm{Re}(z\cdot\overline{w})$ δεν έχει ακρότατα.

ΑΣΚΗΣΗ 39 (από pito)

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ συνεχής και $z\in C-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ έτσι ώστε να ισχύουν $f^2(x)+\eta\mu^2 x=2xf(x)$ για κάθε x πραγματικό και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=l, l=\frac{|z-2|}{|2z-1|}$.

α. Να δείξετε ότι:

i. $|z-2|=|2z-1|$

ii. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο.

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}$.

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

δ. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της f .

ε. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(|z+3-4i|+5)x=x^3+10$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left[1,2\right]$

ΑΣΚΗΣΗ 40 (από Απόστολο Τιντινίδη)

Θεωρούμε το μιγαδικό $z=\left(1+3\sigma\upsilon\nu x\right)+\left(\sqrt{3}+3\eta\mu x\right)i$, όπου $x\in\left[0,2\pi\right)$.

α. Να αποδείξετε ότι η εικόνα M του z κινείται σε κύκλο $\left(C\right)$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του x το $\left|z\right|$ γίνεται ελάχιστο και για ποια μέγιστο. Να υπολογίσετε και την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του $\left|z\right|$.

γ. Έστω x_1, x_2 οι τιμές του x για τις οποίες το $|z|$ παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του και έστω M_1, M_2 οι αντίστοιχες εικόνες του z. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: R \to R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία M_1, M_2. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (C).

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 29/12/2011 – 10/01/2012

Πρότειναν οι:

Απόστολος Τιντινίδης
Γιάννης Σταματογιάννης
Δημήτρης Ιωάννου
Δημήτρης Κατσίποδας
Ηλίας Καμπέλης
Κώστας Τηλέγραφος
Μπάμπης Στεργίου
Περικλής Παντούλας
Στρατής Αντωνέας
Χρήστος Κανάβης
Χρήστος Τσιφάκης
dennys
pito

Έλυσαν (*) οι:

Αθανάσιος Μπεληγιάννης
Απόστολος Τιντινίδης
Γιάννης Σταματογιάννης
Γιώργος Απόκης
Δημήτρης Ιωάννου
Δημήτρης Κατσίποδας
Ηλίας Καμπέλης
Κώστας Ρεκούμης
Μάκης Χατζόπουλος
Μηνάς Χάτζος
Περικλής Παντούλας
Χρήστος Κανάβης
alexandropoulos
dennys
pito

Πηγή – Απαντήσεις
(*)http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=21713