ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Ο τύπος του Euler για τα πολύεδρα

1. Πολύεδρα

Στον τριδιάστατο ευκλείδειο χώρο θεωρούμε ένα σύστημα πολυγώνων, τα οποία είναι διατεταγμένα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να πληρούνται οι εξής δύο συνθήκες:

α) Κάθε πλευρά των πολυγώνων του συστήματος είναι κοινή πλευρά ακριβώς δυο πολυγώνων του συστήματος.

β) Το σύστημα των πολυγώνων είναι συναφές. Η δεύτερη αυτή συνθήκη έχει την εξής έννοια: Όταν $Π_1$, $Π_2$ είναι δύο τυχόντα πολύγωνα του συστήματος, $Α_1$ τυχόν σημείο του $Π_1$ και $Α_2$ τυχόν σημείο του $Π_2$, τότε υπάρχει πολυγωνική γραμμή που συνδέει τα $Α_1$, $Α_2$ και κάθε τμήμα της ανήκει σε πολύγωνο του συστήματος.

Κάθε τέτοιο σύστημα πολυγώνων ονομάζεται **πολύεδρο**. Οι κορυφές και οι πλευρές των πολυγώνων ενός πολυέδρου ονομάζονται αντιστοίχως **κορυφές** και **ακμές** του πολυέδρου. Κάθε πολύγωνο του πολυέδρου ορίζει μια **έδρα** του πολυέδρου.

Ονομάζουμε **απλό πολύεδρο** κάθε πολύεδρο που είναι τοπολογικώς ισοδύναμο προς μια σφαίρα.

Θεώρημα του Euler

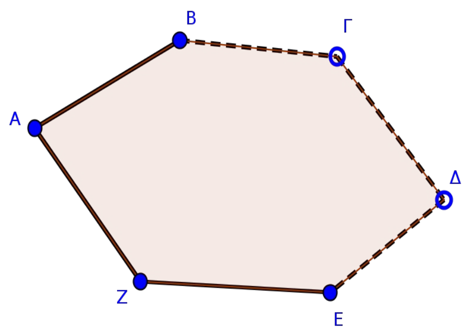
Εάν Κ, Ε, Α είναι αντιστοίχως το πλήθος των κορυφών, των εδρών και των ακμών ενός απλού πολυέδρου, τότε ισχύει: Κ+Ε=Α+2.

απόδειξη $1^{η}$

Υποθέτουμε ότι οι έδρες του πολυέδρου αφαιρούνται ανά μια η μια μετά την άλλη έτσι ώστε η εκάστοτε αφαιρούμενη και η αμέσως προηγούμενη αφαιρεθείσα να έχουν μια κοινή ακμή. Παριστάνουμε με τα σύμβολα $Α_μ$ και $Κ_μ$ το πλήθος των ακμών και των κορυφών που χάνει το πολύεδρο όταν αφαιρείται η έδρα τάξεως μ (η αμέσως μετά την αφαίρεση μ-1 εδρών αφαιρούμενη έδρα του πολυέδρου). Παρατηρούμε ότι έχουμε $Α_1$-$Κ_1$=0 (1) γιατί μετά την αφαίρεση της πρώτης έδρας ισχύει $Α_1$=0=$Κ_1$. Συνεχίζοντας $Α_2$-$Κ_2$=1 (2) (όταν αφαιρείται οποιαδήποτε έδρα εκτός της πρώτης και της τελευταίας, τότε το πλήθος των ακμών που χάνονται είναι κατά ένα μεγαλύτερο από το πλήθος των χαμένων κορυφών. Για παράδειγμα αν αφαιρεθεί η $λ^{η}$ έδρα του σχήματος 1, όπου με συνεχόμενη γραμμή παριστάνονται οι ακμές που ανήκουν σε έδρες του πολυέδρου που δεν έχουν αφαιρεθεί, τότε $Α_λ$-$Κ_λ$=3-2=1.)

Έτσι θα είναι $Α_μ$-$Κ_μ$=1 (μ) για $1<μ<ν=Ε$ και τέλος $Α_ν$-$Κ_ν$=0 (ν). Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη βρίσκουμε:

$(A_1+A_2+...+A_\nu)-(K_1+K_2+...+K_\nu)=E-2$ κι έτσι Α-Κ=Ε-2 ή **Κ+Ε=Α+2**.



σχήμα 1

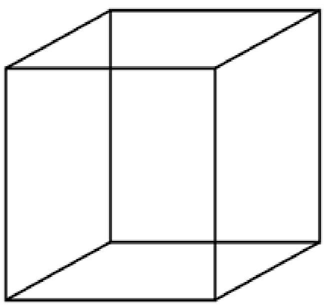
Αν κι εσείς, όπως εγώ, θεωρείτε ότι η προηγούμενη απόδειξη είναι αρκετά ασαφής, ας επιχειρήσουμε να τη βελτιώσουμε.

Θεώρημα του Euler

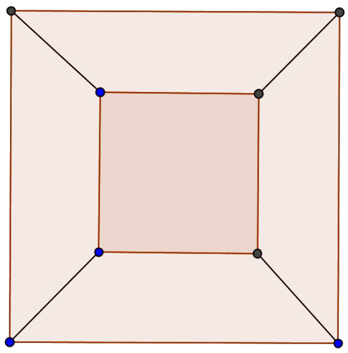
Εάν Κ, Ε, Α είναι αντιστοίχως το πλήθος των κορυφών, των εδρών και των ακμών ενός απλού πολυέδρου, τότε ισχύει: Κ+Ε=Α+2.

<u>απόδειξη 2η</u>

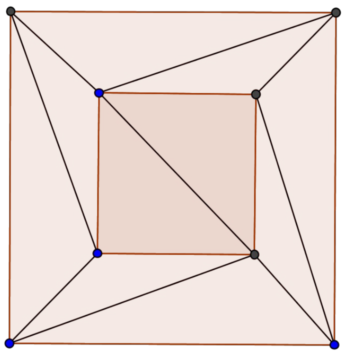
Αφαιρούμε από το απλό πολύεδρο μια έδρα και παραμορφώνουμε τις υπόλοιπες έδρες έτσι ώστε να βρεθούν τελικά στο ίδιο επίπεδο. Η διαδικασία αυτή γίνεται κατάλληλα, ώστε οι έδρες να παραμείνουν ευθύγραμμα πολύγωνα και έτσι ώστε να μη μεταβληθεί το πλήθος των κορυφών τους. Το σύστημα των πολυγώνων που προέκυψε στο επίπεδο ονομάζεται επίπεδο δίκτυο του απλού πολυέδρου. Το επίπεδο δίκτυο του απλού πολυέδρου έχει τόσες κορυφές όσες το πολύεδρο. Επίσης έχει τόσες ακμές όσες το πολύεδρο. Το πλήθος των εδρών του δικτύου είναι κατά μονάδα μικρότερο από το πλήθος των εδρών του πολυέδρου. Όταν σ' ένα πολύγωνο του δικτύου φέρουμε μια διαγώνιο, τότε το πλήθος των ακμών αυξάνεται κατά μια μονάδα και το πλήθος των εδρών επίσης αυξάνεται κατά μια μονάδα, ενώ το πλήθος των κορυφών μένει το ίδιο. Συνεπώς ο αριθμός Κ+Ε-Α δεν μεταβάλλεται. Είναι προφανές ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε από το αρχικό δίκτυο ένα νέο δίκτυο που να αποτελείται μόνο από τρίγωνα. Όπως προκύπτει από τα προηγούμενα για το νέο “τριγωνοποιημένο” δίκτυο ο αριθμός Κ+Ε-Α είναι ίδιος με τον αντίστοιχο του αρχικού δικτύου. Στο τριγωνοποιημένο δίκτυο θεωρούμε ένα τρίγωνο του οποίου μόνο μια πλευρά ανήκει στο περίγραμμα του δικτύου και το αφαιρούμε από το δίκτυο με την εξής έννοια: Απομακρύνουμε από το δίκτυο όλα τα στοιχεία του τριγώνου, που δεν ανήκουν σε άλλο τρίγωνο του δικτύου. Με τη διαδικασία αυτή αφαιρούμε από το δίκτυο μια ακμή και μια έδρα αλλά το πλήθος των κορυφών μένει ίδιο. Συνεπώς ο αριθμός Κ+Ε-Α δεν μεταβάλλεται. Θεωρούμε τώρα ένα τρίγωνο του οποίου δυο πλευρές ανήκουν στο περίγραμμα του δικτύου. Η αφαίρεση ενός τέτοιου τριγώνου έχει σαν συνέπεια το Κ να ελαττώνεται κατά 1, το Α κατά 2 και το Ε κατά 1. Έτσι ο αριθμός Κ+Ε-Α και πάλι μένει ίδιος. Με τις διαδοχικές αφαιρέσεις τριγώνων το δίκτυο καταλήγει τελικά να αποτελείται μόνο από ένα τρίγωνο. Στο τελευταίο αυτό τρίγωνο ισχύει προφανώς η σχέση Κ+Ε-Α=1. Επομένως και στο αρχικό δίκτυο θα ισχύει η ίδια σχέση. Λαμβάνοντας υπόψη το αρχικό βήμα κατά το οποίο αφαιρέσαμε μια έδρα, βρίσκουμε τελικά ότι για το απλό πολύεδρο θα ισχύει η σχέση Κ+Ε-Α=2.



κύβος



Το “απλωμένο” επίπεδο ανάπτυγμα του κύβου



Το τριγωνοποιημένο επίπεδο δίκτυο του κύβου

Δείτε την παραπάνω απόδειξη υπό μορφή κινούμενων εικόνων.

Είσαστε τώρα περισσότερο πεπεισμένοι για την αλήθεια του θεωρήματος; Στην παραπάνω απόδειξη, όπως και στην πρώτη απόδειξη που δώσαμε ακολουθούμε την τακτική αφαίρεσης διαδοχικών εδρών, τριγώνων στην προκειμένη περίπτωση, και στην παρατήρηση του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλεται ο αριθμός Κ-Α+Ε. Βέβαια η δεύτερη απόδειξη έχει ένα διαφορετικό πρώτο άνοιγμα. Είναι η υπόθεση ότι το πολύεδρο μπορεί να παραμορφωθεί και να "απλωθεί" πάνω στο επίπεδο, δημιουργώντας ένα επίπεδο δίκτυο που αποτελείται από σημεία σε πλήθος όσα οι κορυφές του πολυέδρου, από ακμές σε πλήθος ίσες με το πλήθος των ακμών του πολυέδρου, και επίπεδες περιοχές που φράσσουν οι ακμές, σε πλήθος ίσες κατά μια λιγότερη απ' όσες είναι οι έδρες του πολυέδρου.

Αν δεχτούμε πως κάθε απλό πολύεδρο μπορεί να απεικονιστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να απλωθεί στο επίπεδο, το ερώτημα είναι μήπως για το αντίστοιχο επίπεδο γράφημα μπορούμε να αποδείξουμε τον τύπο του Euler, δίχως τη διαδικασία της σταδιακής απομάκρυνσης εδρών. Πράγματι κάτι τέτοιο είναι εφικτό, μέσω μιας επαγωγικής απόδειξης την οποία και παρουσιάζουμε αμέσως.

Θεώρημα του Euler

Εάν Κ, Ε, Α είναι αντιστοίχως το πλήθος των κορυφών, των εδρών και των ακμών ενός απλού πολυέδρου, τότε ισχύει: Κ+Ε=Α+2.

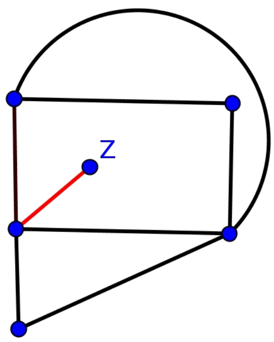
<u>απόδειξη 3η</u>

Θα αποδείξουμε ότι ο τύπος του Euler Κ+Ε=Α+2 ισχύει για κάθε επίπεδο γράφημα Γ, και συνεπώς για όλα τα κυρτά πολύεδρα, αφού μπορούμε να τα "απλώσουμε" στο επίπεδο έτσι ώστε η μια έδρα τους να μετατραπεί σε μη φραγμένη περιοχή.
Θα κάνουμε την απόδειξη με επαγωγή πάνω στο πλήθος Α των ακμών του επίπεδου γραφήματος.
Αν Α=1, τότε υπάρχουν δυο δυνατότητες: είτε η μοναδική ακμή του Γ είναι βρόχος είτε είναι ένα απλό τόξο. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει μία μόνο κορυφή και, σύμφωνα με το θεώρημα του Jordan, δύο έδρες. Στη δεύτερη περίπτωση (Κ,Α,Ε)=(2,1,1). Βλέπουμε ότι και στις δυο περιπτώσεις επαληθεύεται ο τύπος Κ+Ε=Α+2.

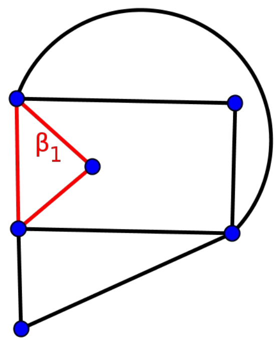
Αν Α>1, υπάρχουν πάλι δυο περιπτώσεις:

α) Το γράφημα Γ περιέχει μία κορυφή Ζ 1ου βαθμού (δηλαδή, μια κορυφή που ανήκει μόνο σε μια ακμή α, η οποία δεν είναι βρόχος. Σχήμα α). Τότε το γράφημα που προκύπτει αν από το Γ αφαιρέσουμε την ακμή α και την κορυφή Ο είναι συνεκτικό, και γι' αυτό ισχύουν οι σχέσεις Κ'=Κ-1, Α'=Α-1, Ε'=Ε. Αφού Α'=Α-1 μπορούμε κάνοντας χρήση της επαγωγικής υπόθεσης να θεωρήσουμε ότι Κ'+Ε'=Α'+2, οπότε θα έχουμε Κ-1+Ε=Α-1+2 δηλαδή Κ+Ε=Α+2.

β) Κάθε φορά που έχουμε διατρέξει μια ακμή $α=α_1$, μπορούμε να συνεχίσουμε να κινούμαστε πάνω σε μια άλλη ακμή $α_2$. Αφού το πλήθος των ακμών του γραφήματος Γ είναι πεπερασμένο, αν συνεχίσουμε έτσι, θα περάσουμε αναπόφευκτα από ακμές που έχουμε ήδη διατρέξει. (Σχήμα β). Συνεπώς με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρούμε μια απλή κλειστή διαδρομή (κύκλο) που αποτελείται από διαδοχικές ακμές $β_1,β_2,...,β_κ$ (μπορεί να έχουμε κ=1). Από τα θεωρήματα Jordan, Schenfliss έπεται ότι αν αφαιρέσουμε την ακμή $β_1$ από το Γ (χωρίς να αφαιρέσουμε τις κορυφές που αποτελούν τα άκρα της) προκύπτει ένα γράφημα Γ' για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις Κ'=Κ, Α'=Α-1, Ε'=Ε-1. Τώρα το επαγωγικό βήμα ολοκληρώνεται όπως στην περίπτωση (α).



Σχήμα α



Σχήμα β

Θεώρημα του Euler
Εάν Κ, Ε, Α είναι αντιστοίχως το πλήθος των κορυφών, των εδρών και των ακμών ενός απλού πολυέδρου, τότε ισχύει: Κ+Ε=Α+2.

απόδειξη 4^{η}[1]

Θεωρούμε τις εξής οντότητες

-1-πολύτοπα: P^{-1}_1 Το κενό σύνολο.

0-πολύτοπα: $P^0_1, P^0_2, \ldots, P^0_K$ Κορυφές του πολυέδρου.

1- πολύτοπα: $P^1_1, P^1_2, \ldots, P^1_A$ Ακμές του πολυέδρου.

2- πολύτοπα: $P^2_1, P^2_2, \ldots, P^2_E$ Έδρες του πολυέδρου.

3- πολύτοπα: P^3_1 Ολόκληρο το πολύεδρο.

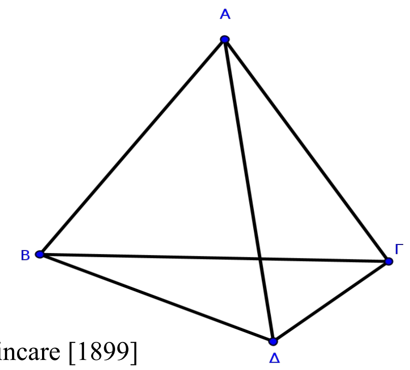
Οι πίνακες πρόσπτωσης $H^{κ}_{ij}$ καθορίζουν πως είναι συγκροτημένο το κάθε πολύτοπο με την εξής έννοια:

$$H^{κ}_{ij}=\begin{cases} 1 & αν \quad P_i^{k-1}\in P_j^k \\ 0 & αν \quad P_i^{k-1}\notin P_j^k \end{cases} .$$

Δεχόμαστε ότι $H^0_{ij}=1$ για i=1 και κάθε j=1,2,...,K.

Επίσης θεωρούμε ότι $H^3_{ij}=1$ για κάθε i=1,2,...,E και j=1.

Ας επεξηγήσουμε με ένα παράδειγμα τις παραπάνω έννοιες. Θεωρούμε λοιπόν το τετράεδρο του παρακάτω σχήματος:



1 Η απόδειξη αυτή οφείλεται στον Poincare [1899]

Εδώ έχουμε

0- πολύτοπα: Σε πλήθος 4, τα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Με το συμβολισμό που έχει εισαχθεί παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε $Α=P^0_1$, $Β=P^0_2$, $Γ=P^0_3$, $Δ=P^0_4$.

Ο πίνακας πρόσπτωσης H^0 είναι ο 1 Χ 4 πίνακας

	Α	Β	Γ	Δ
-1 πολύτοπο	1	1	1	1

1- πολύτοπα: Σε πλήθος 6, οι ακμές P^1_1= ΑΒ, P^1_2= ΑΓ, P^1_3= ΑΔ, P^1_4= ΒΓ, P^1_5= ΒΔ, P^1_6= ΓΔ.

Ο πίνακας πρόσπτωσης H^1 είναι

	ΑΒ	ΑΓ	ΑΔ	ΒΓ	ΒΔ	ΓΔ
Α	1	1	1	0	0	0
Β	1	0	0	1	1	0
Γ	0	1	0	1	0	1
Δ	0	0	1	0	1	1

2- πολύτοπα: Σε πλήθος 4, οι έδρες P^2_1 =ΑΒΓ, P^2_2=ΑΓΔ, P^2_3=ΑΒΔ, P^2_4=ΒΓΔ.

Ο πίνακας πρόσπτωσης H^2 είναι ο 6 Χ 4 πίνακας

	ΑΒΓ	ΑΓΔ	ΑΒΔ	ΒΓΔ
ΑΒ	1	0	1	0
ΑΓ	1	1	0	0
ΑΔ	0	1	1	0
ΒΓ	1	0	0	1

ΒΔ	0	0	1	1
ΓΔ	0	1	0	1

3- πολύτοπα: Σε πλήθος 1. Το τετράεδρο P^3_1=ΑΒΓΔ

Ο πίνακας πρόσπτωσης H^3 είναι ο 4 Χ 1 πίνακας

	ΑΒΓΔ
ΑΒΓ	1
ΑΓΔ	1
ΑΒΔ	1
ΒΓΔ	1

Ονομάζουμε κ- αλυσίδα ένα “τυπικό” άθροισμα της μορφής $\sum_{i=1}^{N_k} x_i P_i^k$ όπου x_i=0 ή 1 και $N_κ$ το πλήθος των κ- πολυτόπων.

Το σύνολο $A^κ$ όλων των κ- αλυσίδων μπορούμε να του δώσουμε τη δομή διανυσματικού χώρου υπεράνω του σώματος F_2={0,1} των δυο στοιχείων με πράξεις σώματος που ορίζονται από τις σχέσεις 0+0=0, 0+1=0+1=1, 1+1=0, 0·0=0, 0·1=1·0=0, 1·1=1.

Οι πρόσθεση δυο αλυσίδων ορίζεται από την $\sum_{i=1}^{N_k} x_i P_i^k + \sum_{i=1}^{N_k} y_i P_i^k = \sum_{i=1}^{N_k} (x_i + y_i) P_i^k$ όπου το άθροισμα x_i+y_i νοείται στην αριθμητική mod2 του F_2.

Αν $\lambda \in F_2$ ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζεται μέσω της $\lambda \sum_{i=1}^{N_k} x_i P_i^k = \sum_{i=1}^{N_k} (\lambda x_i) P_i^k$.

Το σύνολο λοιπόν $A^κ$ όλων των κ- αλυσίδων, συγκροτεί έναν **διανυσματικό χώρο** διάστασης $N_κ$=πλήθος των κ- πολυτόπων.

Παράδειγμα: Για το τετράεδρο ΑΒΓΔ που προαναφέραμε το άθροισμα των 1-αλυσίδων $γ_1$= ΑΒ+ΑΓ+ΒΔ και $γ_2$= ΑΔ+ΒΓ+ΑΒ+ΒΔ είναι $γ_1+γ_2$=ΑΓ+ΑΔ+ΒΓ γιατί

ΑΒ+ΑΒ=0 και ΒΔ+ΒΔ=0.

Ορίζουμε το σύνορο του πολυτόπου P^{κ}_i μέσω της σχέσης $\partial P^k_i = \sum_{j=1}^{N_{k-1}} H^k_{ji} P^{k-1}_j$.

Αν $\gamma = \sum_{i=1}^{N_k} x_i P^k_i$ είναι τυχούσα κ- αλυσίδα, ορίζουμε το σύνορό της μέσω της σχέσης

$$\partial \gamma = \sum_{i=1}^{N_k} x_i \partial P^k_i = \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{N_{k-1}} x_i H^k_{ji} P^{k-1}_j = \sum_{j=1}^{N_k - 1} \sum_{i=1}^{N_k} x_i H^k_{ji} P^{k-1}_j$$

παράδειγμα:

1. Για το τετράεδρο ΑΒΓΔ το σύνορο της 2- αλυσίδας ΑΒΓ+ΒΓΔ είναι ∂(ΑΒΓ+ΒΓΔ)=∂(ΑΒΓ)+∂(ΒΓΔ)=ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ+ΒΓ+ΓΔ+ΒΔ=ΑΒ+ΑΓ+ΓΔ+ΒΔ.
2. ∂∂(ΑΒΓ+ΒΓΔ)=∂(ΑΒ+ΑΓ+ΓΔ+ΒΔ)=∂ΑΒ+∂ΑΓ+∂ΓΔ+∂ΒΔ=Α+Β+Α+Γ+Γ+Δ+Β+Δ=0.

Μια κ-αλυσίδα γ, θα την ονομάζουμε **κ-κύκλωμα** (ή κ-κύκλο) αν ισχύει **∂γ=0**. Είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο V^{κ} όλων των κ-κυκλωμάτων είναι ένας διανυσματικός υποχώρος του συνόλου A^{κ} όλων των κ-αλυσίδων. Αν η αλυσίδα γ είναι $\gamma = \sum_{i=1}^{N_k} x_i P^k_i$ τότε η γ είναι κ-κύκλωμα αν και μόνο αν $\sum_{i=1}^{N_k} x_i H^k_{ji} = 0$ (1) για κάθε $j=1,2,...,N_{\kappa-1}$. Οι εξισώσεις (1) συγκροτούν ένα ομογενές $N_{\kappa-1}$ X N_{κ} σύστημα. Έτσι για τη διάσταση του υποχώρου V^{κ} των κ-κυκλωμάτων θα ισχύει, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας, dim $V^{\kappa}=N_{\kappa}-r_{\kappa}$ (2) όπου r_{κ} συμβολίζει το βαθμό του πίνακα H^{κ}.

Ένα κ-κύκλωμα β θα λέμε ότι "φράσσει" αν είναι το σύνορο μιας (κ+1) αλυσίδας γ. Δηλαδή β "φράσσει" αν και μόνο αν β=∂γ για κάποιο $\gamma \in A^{k+1}$. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι το σύνολο Φ^{κ} των κ-κυκλωμάτων που φράσσουν, αποτελεί διανυσματικό υποχώρο του V^{κ}. Με όρους που εμπλέκουν τους πίνακες προσπώσεως, το κ-κύκλωμα $\beta = \sum_{j=1}^{N_k} b_j P^k_j$ "φράσσει" ανν

$$\sum_{j=1}^{N_k} b_j P^k_j \;=\; \partial \gamma = \sum_{i=1}^{N_{k+1}} \gamma_i \partial P^{k+1}_i = \sum_{i=1}^{N_{k+1}} \sum_{j=1}^{N_k} \gamma_i H^{k+1}_{ji} P^k_j = \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{i=1}^{N_{k+1}} \gamma_i H^{k+1}_{ji} P^k_j \quad \text{ανν}$$

$b_j = \sum_{i=1}^{N_{k+1}} \gamma_i H_{ji}^{k+1}$ (3). Δηλαδή το κύκλωμα β “φράσσει” ανν το μη ομογενές σύστημα (3) έχει λύση ως προς γ_i.

Ο πίνακας $H^{\kappa+1}$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση f: $A^{\kappa+1} \rightarrow V^{\kappa}$. Πράγματι αν f(γ)=β τότε β=∂γ κι έτσι ∂β=∂∂γ=0, δηλαδή $\beta \in V^k$.

Αν υποθέσουμε ότι κάθε κ-κύκλωμα “φράσσει” δηλαδή ότι το σύστημα (3) έχει πάντοτε λύση, τότε η απεικόνιση f είναι επί του V^{κ}, άρα $f(A^{k+1})=V^{\kappa}$.

Θα είναι λοιπόν $\dim f(A^{k+1}) = \dim V^{\kappa}$ άρα $r(H^{\kappa+1})=N_{\kappa}-r_{\kappa}$, δηλαδή $r_{\kappa+1}=N_{\kappa}-r_{\kappa}$ (4)

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος του Euler.

Θεώρημα Euler

Αν σ' ένα πολύεδρο, το σύνολο των κ-κυκλωμάτων του, ταυτίζεται με το σύνολο των κ-κυκλωμάτων που “φράσσουν” για κάθε κ=0,1,2, τότε Κ+Ε=Α+2.

<u>απόδειξη</u>

Η σχέση Κ+Ε=Α+2 γράφεται ισοδύναμα $N_0+N_2=N_1+2$ ή λόγω της (4) θα είναι $r_0+r_1+r_2+r_3=r_1+r_2+2$. Η τελευταία σχέση όμως ισχύει δεδομένου ότι $r_0=r_3=1$.

5. Εφαρμογές του τύπου Euler

5.1 Σε κάθε απλό πολύεδρο, το πλήθος των εδρών του, οι οποίες έχουν περιττό πλήθος πλευρών η καθεμιά, είναι αριθμός άρτιος.

<u>απόδειξη</u>

Έστω E_μ το πλήθος των εδρών του πολυέδρου καθεμιά απο τις οποίες έχει μ πλευρές και Ε το πλήθος όλων των εδρών του. Είναι $E=E_3+E_4+...+E_\lambda$ (1). Επίσης ισχύει $2A=3E_3+4E_4+...+\lambda E_\lambda$ (2)

Αφού Κ+Ε=Α+2 θα είναι $2K=4+2A-2E=4+E_3+2E_4+3E_5+...+(\lambda-2)E_\lambda$ (3). . Προκύπτει λοιπόν ότι $E_3+5E_5+...+(\lambda'-2)E_{\lambda'}$ (όπου λ' περιττός) είναι άρτιος αριθμός οπότε και

$E_3+E_5+...+E_{\lambda'}$ είναι άρτιος.

5.2 Σε κάθε απλό πολύεδρο είναι $K-\frac{E}{2}\geqslant 2$

<u>απόδειξη</u>

$2K=4+2A-2E=4+E_3+2E_4+3E_5+...+(\lambda-2)E_\lambda \geq 4+E_3+E_4+...+E_\lambda=4+E$. Άρα $K-\frac{E}{2}\geqslant 2$.

5.3 Σε κάθε απλό πολύεδρο είναι $A\geqslant\frac{3}{2}E$

<u>απόδειξη</u>

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα $K-\frac{E}{2}\geqslant 2$. Με βάση τον τύπο του Euler είναι K+E=A+2 ή K=A+2-E κι έτσι θα ισχύει $A+2-E-\frac{E}{2}\geqslant 2$ κι έτσι προκύπτει η ζητούμενη ανίσωση.

5.4 Σε κάθε απλό πολύεδρο υπάρχουν τριγωνικές ή τετραγωνικές ή πενταγωνικές έδρες.

<u>απόδειξη</u>

Σε κάθε κορυφή του πολυέδρου συγκλίνουν τουλάχιστον 3 ακμές. Άρα $2A\geqslant 3K$. Θέτουμε $M=E_4+2E_5+...+(\lambda-3)E_\lambda$. Τότε από την (3) έχουμε 2K=4+M+E. Επίσης από τον τύπο Euler προκύπτει K+E=A+2 άρα $A=K+E-2=\frac{3E}{2}+\frac{M}{2}$. $2A\geqslant 3K$ $\Leftrightarrow$ $3E+M \geq 6+\frac{3M}{2}+\frac{3E}{2}$ $\Leftrightarrow$ $3E \geq 12 + M$ $\Leftrightarrow$ $3E_3+2E_4+E_5 \geq 12+E_7+2E_8+...+(\lambda-6)E_\lambda$ και επομένως θα πρέπει $3E_3+2E_4+E_5 \geq 12$ σχέση η οποία δεν είναι δυνατόν να ισχύει αν $E_3=E_4=E_5=0$.

6. Πλατωνικά στερεά

Πλατωνικό στερεό λέγεται ένα κυρτό κανονικό πολύεδρο, του οποίου όλες οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα και όλες οι πολυεδρικές γωνίες του είναι ίσες. Επομένως, όλες οι ακμές του είναι ίσα ευθύγραμμα τμήματα, καθώς επίσης και όλες οι επίπεδες γωνίες των εδρών του είναι ίσες.

6.1 Υπάρχουν μόνο πέντε Πλατωνικά στερεά.

<u>απόδειξη</u>

Συμβολίζουμε με α το πλήθος των ακμών μιας έδρας και με ε το πλήθος των εδρών που διέρχονται από κάθε κορυφή. Επειδή κάθε ακμή περιέχεται ακριβώς σε δυο έδρες, θα έχουμε τη σχέση αΕ=2Α (6.1.1)

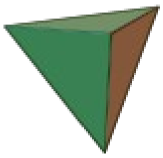
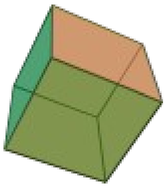
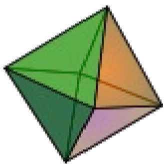
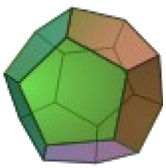
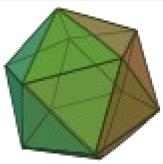
Επίσης, αφού κάθε ακμή περιέχει ακριβώς δυο κορυφές, έχουμε εΚ=2Α (6.1.2). Από τις (6.1.1) και (6.1.2), με βάση τον τύπο του Euler Κ+Ε=Α+2 θα έχουμε:

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2} \quad (6.1.3)$$

Για τους φυσικούς αριθμούς α και ε ισχύει $\alpha \geq 3$, και $\varepsilon \geq 3$. Αν ήταν ταυτόχρονα α>3 και ε>3 τότε από την (6.1.3) θα έπρεπε $\frac{1}{A} \leq 0$ που είναι άτοπο. Εξετάζουμε την περίπτωση α=3. Από την (6.1.3) προκύπτει $\frac{1}{A}=\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{6}$ (6.1.4) και επομένως θα πρέπει ε<6. Έτσι οι επιτρεπτές τιμές του ζεύγους (α,ε) είναι (3,3), (3,4), (3,5). Η περίπτωση ε=3 οδηγεί παρόμοια στα ζεύγη τιμών (3,3), (4,3) και (5,3). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχουν μόνο πέντε επιτρεπτά ζεύγη τιμών και συνεπώς μόνο πέντε πλατωνικά στερεά.

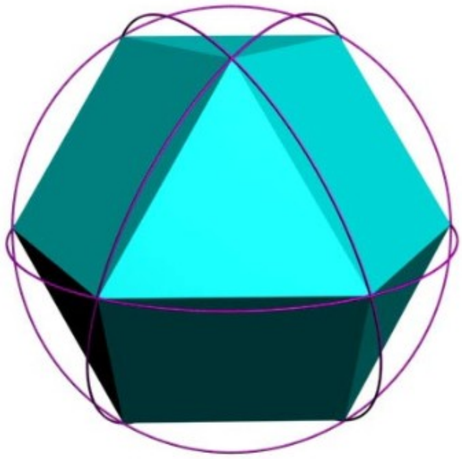
Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται τα στοιχεία και οι ονομασίες των πέντε πλατωνικών στερεών.

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

		Κορυφές	**Ακμές**	**Έδρες**	**Είδος Έδρας**
Τετράεδρο		4	6	4	τρίγωνο
Κύβος		8	12	6	τετράγωνο
Οκτάεδρο		6	12	8	τρίγωνο
Δωδεκάεδρο		20	30	12	πεντάγωνο
Εικοσάεδρο		12	30	20	τρίγωνο

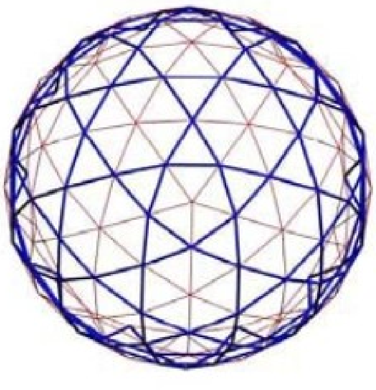
Παρατήρηση 1: Η παραπάνω διερεύνηση δίνει ουσιαστικά όλα τα "τοπολογικώς κανονικά" πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή τα απλά πολύεδρα, που έχουν τις εξής ιδιότητες: α) Όλες οι έδρες του πολυέδρου έχουν το ίδιο πλήθος ακμών. β) Το πλήθος των εδρών, που διέρχονται από μια κορυφή του πολυέδρου, είναι το ίδιο για όλες τις κορυφές του πολυέδρου. (Φυσικά και το πλήθος των ακμών που διέρχονται από μια κορυφή είναι ίδιο για όλες τις κορυφές του πολυέδρου).

Παρατήρηση 2:

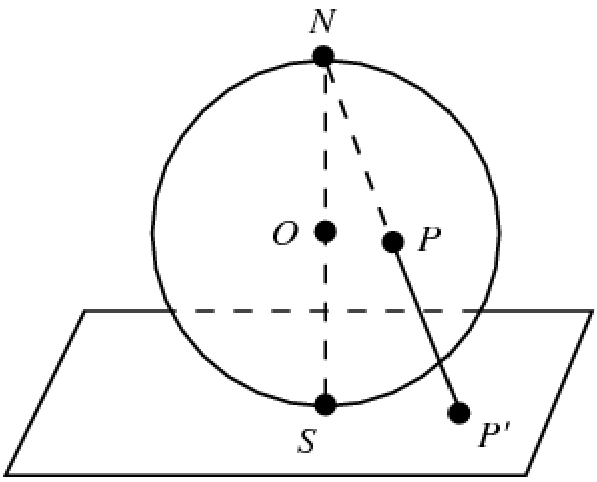


Φανταστείτε ότι έχετε το πολύεδρο του παραπάνω σχήματος και μια σφαίρα περιγεγραμμένη σε αυτό. Αν θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια του πολυέδρου είναι ελαστική, τότε θα μπορούσαμε να “φουσκώσουμε” το πολύεδρο ώστε οι έδρες του να βρεθούν πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Είναι εποπτικά φανερό, ότι για το αντίστοιχο σφαιρικό πολύεδρο όλα όσα έχουμε αποδείξει σε προηγούμενες παραγράφους, όπως για παράδειγμα ο τύπος του Euler, εξακολουθούν να ισχύουν.

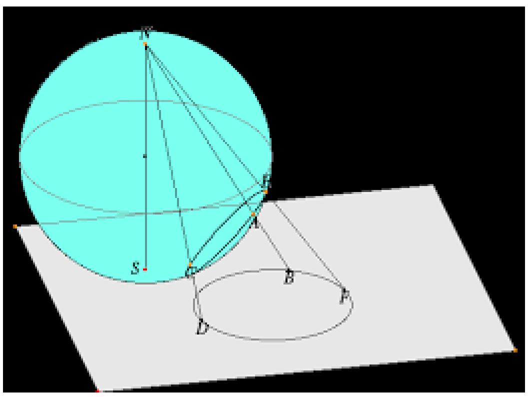
Αντιστρόφως, αν θεωρήσουμε ένα γράφημα Γ πάνω στη σφαίρα, όπως αυτό της παρακάτω εικόνας.

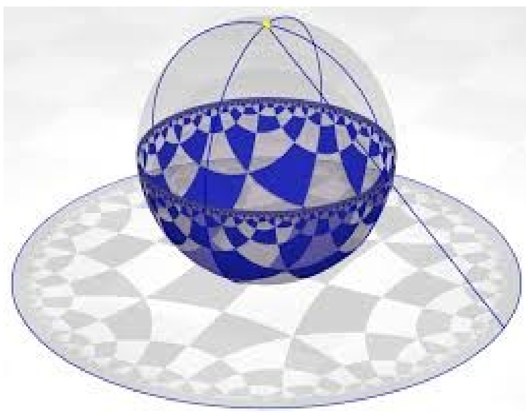


Τότε υπάρχει τρόπος να υλοποιήσουμε το γράφημα Γ αυτό πάνω στο επίπεδο. Θεωρούμε ένα σημείο Ο (το οποίο ονομάζουμε βόρειο πόλο) στο εσωτερικό μιας από τις έδρες του, και με κέντρο το σημείο Ο, προβάλλουμε τα σημεία P του γραφήματος στο σημείο P' του επιπέδου που εφάπτεται της σφαίρας στο νότιο πόλο της. (Στερεογραφική προβολή).



Προφανώς με την αντίστροφη διαδικασία μπορούμε να απεικονίσουμε τα σημεία P', ενός επίπεδου γραφήματος σε σημεία P ενός σφαιρικού γραφήματος.



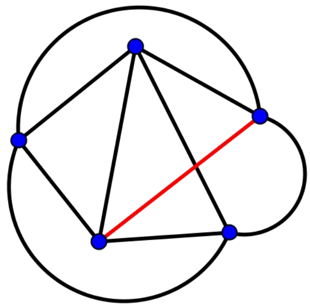


7. Επίπεδα γραφήματα

Θα εφαρμόσουμε τώρα τον τύπο του Euler σε συγκεκριμένα επίπεδα και σφαιρικά γραφήματα. Πρόκειται για γραφήματα στα οποία το πλήθος των ακμών που διατρέχουμε προκειμένου να κινηθούμε γύρω από οποιαδήποτε έδρα τους (περιλαμβανομένης και της εξωτερικής όταν πρόκειται για επίπεδα γραφήματα) είναι μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου σταθερού ακεραίου n>2. Αν κινηθούμε γύρω από όλες τις έδρες και αθροίσουμε το πλήθος των ακμών που έχουμε διέλθει, θα μετρήσουμε τουλάχιστον nE ακμές. Έτσι όμως έχουμε απαριθμήσει κάθε ακμή δύο φορές, οπότε θα ισχύει η ανίσωση $2A \geq nE$ (7.1)

Από τον τύπο K+E=A+2 προκύπτει nK+nE=2n+2nA άρα καταλήγουμε τελικά σε συνδιασμό με την (7.1) στη σχέση: $A \leqslant \frac{n(K-2)}{n-2}$ (7.2). Αυτή η ανισότητα είναι χρήσιμη όταν θέλουμε να καθορίσουμε αν είναι δυνατή η σχεδίαση ενός γραφήματος στο επίπεδο ή στη σφαίρα.

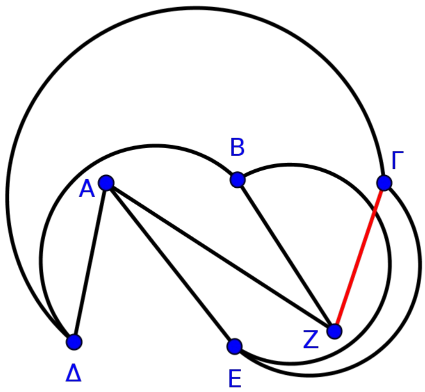
Στο σχήμα (7.3) βλέπουμε ένα επίπεδο γράφημα με πέντε κορυφές. Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να ενώσουμε κάθε κορυφή με όλες τις άλλες με επίπεδες καμπύλες που δεν τέμνονται μεταξύ τους. Το γράφημα συμβολίζεται με K_5.



σχήμα 7.3

Στο γράφημα αυτό δεν υπάρχουν βρόχοι ή πολλαπλές ακμές (δύο η περισσότερες ακμές με κοινά άκρα), και συνεπώς αν τοποθετηθεί στο επίπεδο, κάθε έδρα του θα έχει τουλάχιστον τρεις συνοριακές ακμές. Θέτοντας στην (7.2) n=3, K=5, A=10 βρίσκουμε $10 \leq 9$ που δεν ισχύει, άρα το K_5 δεν μπορεί να υφίσταται στο επίπεδο.

Ένα παρόμοιο γράφημα σχετίζεται με το παλιό πρόβλημα των τριών πηγαδιών. Υπάρχουν τρία πηγάδια (Α,Β,Γ) και τρία αγροκτήματα (Δ,Ε,Ζ) οι ιδιοκτήτες των οποίων δεν έχουν και τις καλύτερες σχέσεις. Για να αποφεύγονται οι προστριβές πρέπει να χαράξουμε τα μονοπάτια απο κάθε κτήμα σε κάθε πηγάδι έτσι ώστε να μη διασταυρώνονται μεταξύ τους. Σχήμα (7.4)



σχήμα 7.4

Το γράφημα αυτό συμβολίζεται με $K_{3,3}$ και έχουμε Κ=6, Α=9, n=4 αφού δεν υπάρχουν κλειστές διαδρομές με 3 ακμές. Αντικαθιστώντας στην (7.2) βρίσκουμε ότι η ανίσωση δεν ικανοποιείται, επομένως το $K_{3,3}$ δεν υφίσταται στο επίπεδο.[2]

Άλλη μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή προκύπτει από την (7.2) θέτοντας n=6. Είναι γνωστό ότι οι μέλισσες κατασκευάζουν την κηρήθρα τους από εξάγωνα κελιά. Θα ήταν δυνατόν να δώσουν στην κηρήθρα σφαιρική μορφή και να ισχύει ο ίδιος κανόνας κατασκευής; Από την (7.2) βρίσκουμε ότι $A<\frac{3}{2}K$ (7.5). Παρατηρούμε επίσης ότι από κάθε κορυφή ξεκινούν τουλάχιστον τρεις ακμές. Συνεπώς $3K \leq 2A$ η οποία αντιφάσκει με την (7.5), πράγμα που σημαίνει ότι η κατασκευή μιας σφαιρικής κηρήθρας με εξαγωνικά κελιά, είναι αδύνατη.

Η ίδια επιχειρηματολογία δείχνει ότι δεν υπάρχουν κυρτά πολύεδρα των οποίων οι έδρες να έχουν τουλάχιστον έξι πλευρές. Αυτός είναι ο λόγος που κατασκευάζουμε τις μπάλες ποδοσφαίρου από εξάγωνα και πεντάγωνα κομμάτια.

2 Το θεώρημα Kuratiwski – Pontrjagin μας διαβεβαιώνει ότι ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα υπογράφημα του οποίου ομοιομορφική εικόνα είναι το K_3 ή το $K_{3,3}$.

Βιβλιογραφία

1. Εισαγωγή στη Γεωμετρία – Ν. Στεφανίδη. / Εκδόσεις Ζήτη
2. Αποδείξεις και ανασκευές – Imre Lakatos. / Εκδόσεις τροχαλία
3. Μεγάλη Μαθηματική Εγκυκλοπαίδεια. / Εκδόσεις Δημόκριτος
4. Περιοδικό Quantum- Τόμος 5/Τεύχος 2 – Μάρτιος/Απρίλιος 1998
5. Proofs from the Book – Martin Aigner, Gunter M. Ziegler/ Springer
6. https://el.wikipedia.org/wiki/Πλατωνικό_στερεό