ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Η εξίσωση 2ου βαθμού στο επίπεδο

Στο επίπεδο θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy, και την εξίσωση

$$ax^2+2\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\eta=0 \quad (1) \text{ με } \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$$

Το ερώτημα στο οποίο θέλουμε να απαντήσουμε είναι τι είδους καμπύλη παριστάνει η εξίσωση (1) και θα αναζητήσουμε κριτήρια βάσει των οποίων μπορεί να αναγνωριστεί το είδος της αναπαριστάμενης καμπύλης. Θα δικαιολογήσουμε ότι η τετραγωνική εξίσωση (1) μπορεί να παριστάνει ένα σημείο, μια ευθεία, δυο ευθείες, μια έλλειψη ή κύκλο, μια παραβολή, μια υπερβολή ή μπορεί και να μην παριστάνει τίποτα. Όπως βλέπουμε λοιπόν η (1) παριστάνει γενικά μια κωνική τομή.

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας για απλότητα θεωρώντας την ειδικότερη περίπτωση εξίσωσης με τη μορφή $ax^2+2\beta xy+\gamma y^2+\eta=0$ (2) και $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$.

Η παράσταση $ax^2+2\beta xy+\gamma y^2$ είναι μια συμμετρική τετραγωνική μορφή και μπορεί να αναπαρασταθεί υπό μορφή γινομένου πινάκων $(x\ y)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ και συνεπώς η εξίσωση (2) θα γράφεται $(x\ y)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ =-η (3)

Προσπαθούμε να διαγωνιοποιήσουμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$ ώστε να ανάγουμε την (3) σε μια απλούστερη μορφή. Η χαρακτηριστική εξίσωση του Α είναι det(A-λI)=0 ⇔ $\lambda^2-(\alpha+\gamma)\lambda+\alpha\gamma-\beta^2=0$ (4)

Η διακρίνουσα d της (4) είναι $d=(\alpha-\gamma)^2+4\beta^2\geq 0$. Δηλαδή οι ιδιοτιμές του Α είναι πάντοτε πραγματικές.

- Αν η διακρίνουσα είναι μηδενική, τότε α=γ και β=0, άρα η (2) θα παριστάνει:

κύκλο αν η<0, σημείο αν η=0, τίποτα αν η>0.

- Αν η διακρίνουσα είναι θετική τότε η (4) έχει δυο άνισες λύσεις $\lambda_1<\lambda_2$ όπου $\lambda_1=\dfrac{\alpha+\gamma-\sqrt{d}}{2}$, $\quad \lambda_2=\dfrac{\alpha+\gamma+\sqrt{d}}{2}$ (5)

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{u}_1=\left(1,\dfrac{\gamma-\alpha-\sqrt{d}}{2\beta}\right)$ $\quad \vec{u}_2=\left(1,\dfrac{\gamma-\alpha+\sqrt{d}}{2\beta}\right)$.

Παρατηρούμε ότι $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0$ δηλαδή $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$. Κανονικοποιώντας τα διανύσματα $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ προκύπτουν τα διανύσματα $\vec{\delta}_1=\dfrac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$ και $\vec{\delta}_2=\dfrac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|}$ που αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Αν P είναι ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2$ θα ισχύει $P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$. Ως προς το ορθοκανονικό σύστημα που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2$ και το οποίο προκύπτει με κατάλληλη στροφή του συστήματος xOy περί την αρχή O, η εξίσωση (2) ή (3) παίρνει τη μορφή $\lambda_1 X^2+\lambda_2 \Psi^2=-\eta$ (6). Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι για τη γωνία ω της παραπάνω στροφής των αξόνων ισχύει η σχέση $\varepsilon\varphi 2\omega=\frac{2\beta}{\alpha-\gamma}$ (6.1)

Η σχέση (6) μπορεί να προκύψει αν στην (2) θέσουμε $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ \Psi \end{pmatrix}$ (6.2)

Με βάση την εξίσωση (6) μπορούμε πλέον εύκολα να κρίνουμε το είδος της καμπύλης που παριστάνει.

Όταν οι αριθμοί λ_1,λ_2 είναι ομόσημοι δηλαδή $\lambda_1\lambda_2>0$

- Αν $\lambda_1,\lambda_2>0$ και $\eta<0$ παριστάνει έλλειψη. (Ειδικότερα αν $\lambda_1=\lambda_2$ παριστάνει κύκλο)
- Αν $\lambda_1,\lambda_2>0$ και $\eta=0$ παριστάνει ένα σημείο.
- Αν $\lambda_1,\lambda_2>0$ και $\eta>0$ δεν παριστάνει τίποτα.
- Αν $\lambda_1,\lambda_2<0$ και $\eta<0$ δεν παριστάνει τίποτα.
- Αν $\lambda_1,\lambda_2<0$ και $\eta=0$ παριστάνει ένα σημείο.
- Αν $\lambda_1,\lambda_2<0$ και $\eta>0$ παριστάνει έλλειψη.

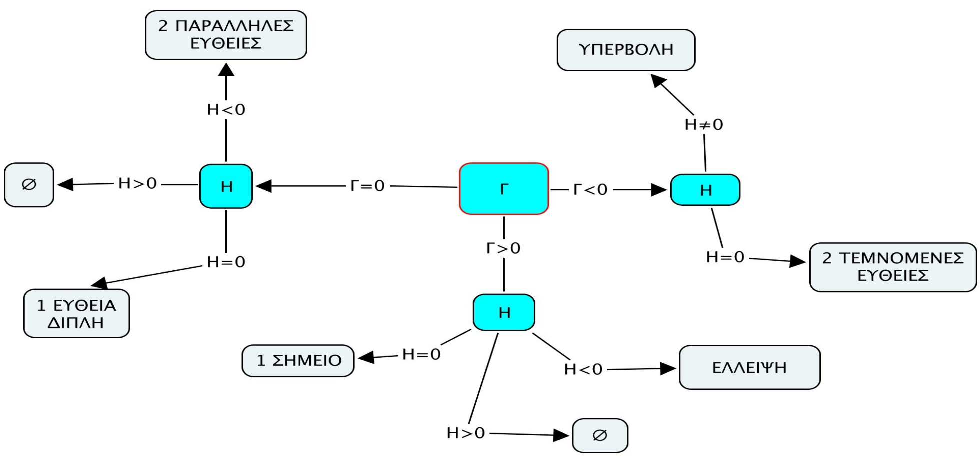
Όταν οι αριθμοί λ_1,λ_2 είναι ετερόσημοι δηλαδή $\lambda_1\lambda_2<0$

- Αν $\eta\neq0$ παριστάνει υπερβολή.
- Αν $\eta=0$ παριστάνει 2 ευθείες τεμνόμενες.

Όταν $\lambda_1\lambda_2=0$ (τότε μόνο ένας από τους λ_1,λ_2 είναι μηδέν, έστω $\lambda_2=0$ δίχως βλάβη της γενικότητας)

- Αν $\eta=0$ παριστάνει μια ευθεία (διπλή).
- Αν $\eta\lambda_1<0$ παριστάνει δυο παράλληλες ευθείες.
- Αν $\eta\lambda_1>0$ δεν παριστάνει τίποτε.

Επειδή $\lambda_1+\lambda_2=\alpha+\gamma$, $\lambda_1\lambda_2=\alpha\gamma-\beta^2$, αν θέσουμε $A=\lambda_1+\lambda_2$, $\Gamma=\lambda_1\lambda_2$, $H=\eta A$ όλα τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να συνοψιστούν στο παρακάτω διάγραμμα:



Επιστρέφουμε τώρα στην γενική μορφή $\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\eta=0$ (1)
Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

- **Έστω Γ≠0 δηλαδή $\alpha\gamma-\beta^2\neq 0$**

Θέτουμε τώρα $\chi=X+\chi_0$, $y=\Psi+\psi_0$ στην (1) και παίρνουμε
$\alpha X^2+2\beta X\Psi+\gamma\Psi^2+(2\alpha\chi_0+2\beta\psi_0+\delta)X+(2\gamma\psi_0+2\beta\chi_0+\varepsilon)\Psi+\alpha\chi_0^2+2\beta\chi_0\psi_0+\gamma\psi_0^2+\delta\chi_0+\varepsilon\psi_0+\eta=0$ (7)

Επιλέγουμε τώρα τα χ_0, ψ_0 ως λύσεις του συστήματος $\begin{cases}2\alpha\chi_0+2\beta\psi_0+\delta=0\\ 2\gamma\psi_0+2\beta\chi_0+\varepsilon=0\end{cases}$ (8) το οποίο έχει μοναδική λύση λόγω της συνθήκης Γ≠0. Είναι $\chi_0=\dfrac{\beta\varepsilon-\gamma\delta}{2(\alpha\gamma-\beta^2)},\quad \psi_0=\dfrac{\beta\delta-\alpha\varepsilon}{2(\alpha\gamma-\beta^2)}$ (9)

Η παράσταση $\alpha\chi_0^2+2\beta\chi_0\psi_0+\gamma\psi_0^2+\delta\chi_0+\varepsilon\psi_0+\eta$ μετά την αντικατάσταση των χ_0, ψ_0 γίνεται
$\alpha\chi_0^2+2\beta\chi_0\psi_0+\gamma\psi_0^2+\delta\chi_0+\varepsilon\psi_0+\eta=$ $\dfrac{4(\alpha\gamma-\beta^2)\eta-(\gamma\delta^2-2\beta\delta\varepsilon+\alpha\varepsilon^2)}{4(\alpha\gamma-\beta^2)}=\dfrac{B}{4\Gamma}$ όπου Β θέσαμε τον αριθμητή του προηγούμενου κλάσματος. Η εξίσωση (1) λοιπόν θα πάρει τη μορφή
$\alpha X^2+2\beta X\Psi+\gamma\Psi^2+$ $\dfrac{B}{4\Gamma}$ $=0$ (10) και η διερεύνηση του είδους της καμπύλης που παριστάνει η (10) ακολουθεί τα βήματα της διερεύνησης που κάναμε στο πρώτο μέρος του άρθρου με η= $\dfrac{B}{4\Gamma}$. Θα έχουμε επομένως θέτοντας Η=ηΑ= $\dfrac{A\cdot B}{4\Gamma}$:

Αν **Γ>0** τότε

- Αν Η>0 δηλαδή ΑΒ>0, δεν παριστάνει τίποτα.
- Αν Η=0 δηλαδή ΑΒ=0, παριστάνει ένα σημείο
- Αν Η<0 δηλαδή ΑΒ<0, παριστάνει έλλειψη.

Αν **Γ<0** τότε

- Αν Η≠0 παριστάνει υπερβολή.
- Αν Η=0 παριστάνει δυο τεμνόμενες ευθείες.

- **Έστω Γ=0 δηλαδή $\alpha\gamma-\beta^2=0$**

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση ιδιοτιμών (4) του πίνακα Α γίνεται $\lambda^2-(\alpha+\gamma)\lambda=0$ και έχει λύσεις τους αριθμούς $\lambda_1=\alpha+\gamma$ και $\lambda_2=0$. (Είναι $\lambda_1\neq 0$ γιατί διαφορετικά θα ήταν $\alpha=\beta=\gamma=0$). Λύνοντας τα συστήματα Α $\begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix}$ $=\lambda_i$ $\begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix}$ για i=1,2 βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{u}_1=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\quad \vec{u}_1=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$. Ισχύει ότι $\vec{u}_1\perp\vec{u}_2$ και $|\vec{u}_1|=|\vec{u}_2|=1$. Έτσι με τον

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

μετασχηματισμό $x=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha\chi'-\beta y')$ *και* $y=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\beta\chi'-\alpha y')$ (11) η εξίσωση (1) γίνεται

$(\alpha+\gamma)x'^2+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha\delta+\varepsilon\beta)\chi'+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha\varepsilon-\beta\delta)y'+\eta=0$ (12) δηλαδή είναι της μορφής

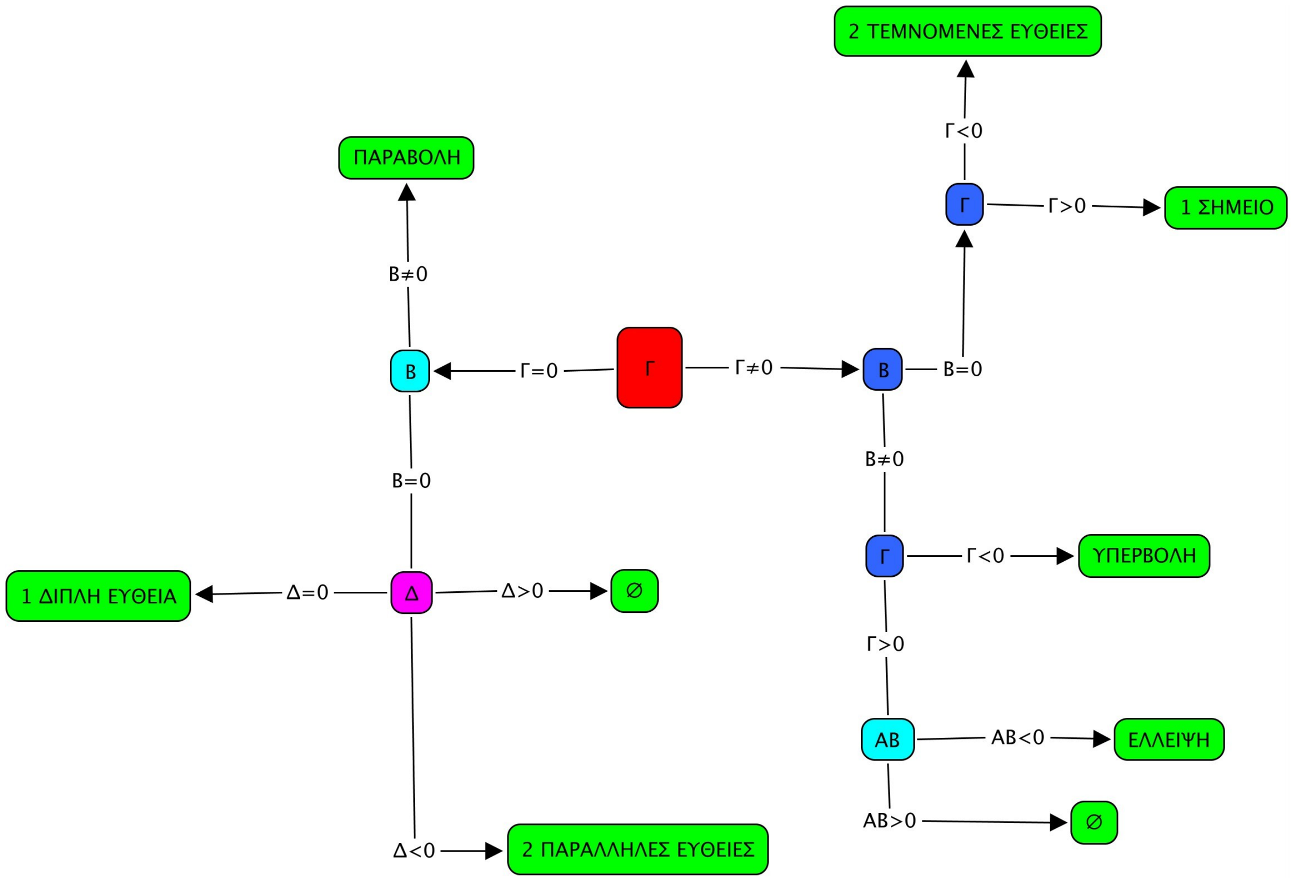
$\alpha'x'^2+\delta'x'+\varepsilon'y'+\eta=0$ (13). Είναι εύκολο να δούμε ότι $\alpha'\varepsilon'^2$=-Β δηλαδή $\varepsilon'^2=-\frac{B}{A}$

- Αν $\varepsilon'\neq 0$ δηλαδή $B\neq 0$ η (13) παριστάνει **παραβολή**.
- Αν $\varepsilon'=0$, δηλαδή Β=0 προκύπτει η εξίσωση $\alpha'x'^2+\delta'x'+\eta=0$ (14). Η διακρίνουσα της εξίσωσης (14) είναι $\Delta'=\delta'^2-4\alpha'\eta$. Είναι εύκολο να δούμε γενικά ότι ισχύει $\delta'^2+\varepsilon'^2=\delta^2+\varepsilon^2$ (κάνοντας πχ χρήση της ταυτότητας Lagrange).
  Έτσι η διακρίνουσα Δ΄ θα είναι $\Delta'=\delta^2+\varepsilon^2-4\alpha'\eta$ (15)
  Αν **Δ΄<0** η (15) δεν παριστάνει **τίποτα**.
  Αν **Δ΄=0** η (15) παριστάνει μια (διπλή) **ευθεία**: $x'=\frac{-\delta'}{2\alpha'}$
  Αν **Δ΄>0** η (15) παριστάνει **δυο παράλληλες ευθείες**
  $\varepsilon_1:\chi'=\frac{-\delta'-\sqrt{\Delta'}}{2\alpha'}$, $\varepsilon_2:\chi'=\frac{-\delta'+\sqrt{\Delta'}}{2\alpha'}$.

Συνοψίζουμε τη διαδικασία αναγνώρισης της τετραγωνικής καμπύλης που παριστάνει η εξίσωση $\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\eta=0$

Θέτουμε **Α=α+γ, Γ=αγ-β², Β=4(αγ-β²)-(γδ²-2βδε+αε²), Δ=4(α+γ)η-(δ²+ε²)**

Η αναγνώριση του είδους της τετραγωνικής καμπύλης που παριστάνει η εξίσωση γίνεται με βάση το παρακάτω διάγραμμα:



Μελετήστε την τετραγωνική καμπύλη στο περιβάλλον του λογισμικού GeoGebra, εδώ.