ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Εννιάρια στο δεκαδικό ανάπτυγμα όρων αριθμητικής προόδου

Έστω η αριθμητική πρόοδος $\alpha_n=7n-3,\ n\in\mathbb{N}^*$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $n\in\mathbb{N}^*$ ώστε $\alpha_n=\underbrace{999\ldots9}_{m}$ για κατάλληλο (οσοδήποτε μεγάλο) $m\in\mathbb{N}^*$.

<u>απόδειξη</u>

Παρατηρούμε ότι $\underbrace{999\ldots9}_{m} = 9\cdot\underbrace{111\ldots1}_{m}=9\cdot\left(1+10+10^2+\ldots+10^{m-1}\right) =$

$9\cdot\dfrac{10^m-1}{9}=10^m-1$. Έτσι η ισότητα $\alpha_n=\underbrace{999\ldots9}_{m}$ είναι ισοδύναμη με την ισότητα $7n-3=10^m-1 \Leftrightarrow 7n=10^m+2 \Leftrightarrow 10^m\equiv-2 \bmod 7 \equiv 5 \bmod 7$, οπότε αρκεί η ισοδυναμία $3^m\equiv 5 \bmod 7$ να έχει λύση.
Είναι
$3^1 \equiv 3 \bmod 7$
$3^2 \equiv 2 \bmod 7$
$3^3 \equiv 6 \bmod 7$
$3^4 \equiv 4 \bmod 7$
$3^5 \equiv 5 \bmod 7$
$3^6 \equiv 1 \bmod 7$
Οι αριθμοί $m=6k+5$ ικανοποιούν την ισοδυναμία $3^m \equiv 5 \bmod 7$ αφού έχουμε $3^m=3^{6k+5}=(3^6)^k3^5 \equiv 1\cdot5 \bmod 7 \equiv 5 \bmod 7$.

Επέκταση: Έστω ακολουθία φυσικών αριθμών α_n, με διαφορά $\omega=p$ πρώτο αριθμό $(p,10)=1$ και πρώτο όρο $1\le\alpha_1\le p-2$. Τότε $\alpha_n=pn+\alpha_1-p$ και η συνθήκη $\alpha_n=999\ldots9$ είναι ισοδύναμη με την ισοδυναμία $10^m \equiv (1+\alpha_1) \bmod p$. Απο το θεώρημα Euler-Fermat $10^{p-1} \equiv 1 \bmod p$. Θέτοντας $10^i \equiv b_i \bmod p$ με $i=1,2,\ldots,p-1$ η γενίκευση της πρότασης θα ισχύει αν $b_i=1+\alpha_1$ για κάποιο i και τότε θα είναι $m=(p-1)k+i$. Ειδικότερα η γενίκευση θα ισχύει αν το 10 είναι αρχική ρίζα $\bmod p$.