ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Οριακά σημεία των ακολουθιών {να}, sinv, cosv
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Οριακά σημεία ακολουθιών

Ο πραγματικός αριθμός ξ καλείται **οριακό σημείο** της ακολουθίας πραγματικών αριθμών α_ν όταν για κάθε θετικό αριθμό $\varepsilon>0$, και κάθε φυσικό αριθμό N υπάρχει φυσικός αριθμός $n\geq N$ έτσι ώστε $|\alpha_n-\xi|<\varepsilon$.

Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με το γεγονός ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν **άπειροι όροι** της ακολουθίας α_n στο διάστημα $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$.

Είναι φανερό πως ο αριθμός ξ είναι οριακό σημείο της ακολουθίας α_ν αν και μόνο αν το 0 είναι οριακό σημείο της ακολουθίας $\alpha_\nu-\xi$.

Αν μια ακολουθία α_ν είναι 1-1 δηλαδή ισχύει $\kappa\neq\lambda \Leftrightarrow \alpha_\kappa \neq \alpha_\lambda$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει φυσικός αριθμός ν, έτσι ώστε $0<|\alpha_\nu|<\varepsilon$, τότε το 0 είναι οριακό σημείο της α_ν.

Στο άρθρο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποια από τα εργαλεία που θα μας επιτρέψουν να μελετήσουμε τα οριακά σημεία ακολουθιών όπως οι **sinn, cosn, {αn}**, όπου {αn} το κλασματικό μέρος του αn και α άρρητος πραγματικός. Θα μας δωθεί επίσης η ευκαιρία να δούμε τα κλασικά θεωρήματα των **Dirichlet** και **Kronecker** που αφορούν την διοφαντική προσέγγιση πραγματικών αριθμών.

Κλασματικό μέρος πραγματικού αριθμού

Αν $x\in\mathbb{R}$, ορίζουμε ως κλασματικό μέρος του x, τον αριθμό $\{x\}=x-[x]$, όπου $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x.
Είναι γνωστό ότι το ακέραιο μέρος του αριθμού χ είναι ο μοναδικός ακέραιος [χ] που ικανοποιεί την $[\chi]\leq\chi<[\chi]+1$
Είναι φανερό ότι $0\leq\{x\}<1$.
Πολλές φορές το κλασματικό μέρος του πραγματικού χ συμβολίζεται με (χ).

<u>Πρόταση 1.</u>
$\{\alpha+\beta\}=\{\alpha\}+\{\beta\}$, αν $\{\alpha\}+\{\beta\}<1$
$\{\alpha+\beta\}=\{\alpha\}+\{\beta\}-1$, αν $\{\alpha\}+\{\beta\}\geq1$

<u>απόδειξη</u>

Είναι $0\leq\{\alpha\}+\{\beta\}<2$
Αν $0\leq\{\alpha\}+\{\beta\}<1$ τότε
$\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}$
$\beta=[\beta]+\{\beta\}$
Άρα $\alpha+\beta=[\alpha]+[\beta]+\{\alpha\}+\{\beta\}$. Αφού $\{\alpha\}+\{\beta\}<1$ θα είναι $[\alpha+\beta]=[\alpha]+[\beta]$ και επομένως

α+β-{α+β}=α-{α}+β-{β} και τελικά {α+β}={α}+{β}.
Αν 1≤{α}+{β}<2 τότε 1≤α-[α]+β-[β]<2 ⇔ 1-α-β≤-[α]-[β]<2-α-β ⇔ α+β-1<[α]+[β]-1≤α+β. Από την τελευταία διπλή ανίσωση συμπεραίνουμε ότι [α+β]=[α]+[β]-1 οπότε {α+β}={α}+{β}-1.

<u>πρόταση 2</u>
Αν ο πραγματικός αριθμός α δεν είναι ακέραιος, τότε {-α}=1-{α}.

<u>απόδειξη</u>

Στην πρόταση (1) θέτουμε β=-α οπότε {0}={α+(-α)}={α}+{-α}-δ, όπου δ=0 ή 1. Επειδή όμως αμφότερα τα {α},{-α} είναι θετικοί αριθμοί θα πρέπει να είναι δ=1.

<u>πρόταση 3</u>
Αν {α}>{β} τότε {α-β}={α}-{β}.

<u>απόδειξη</u>

{α}={β+α-β}={β}+{α-β}-δ, με δ=0 ή 1. Έτσι {α}-{β}={α-β}-δ. Επειδή {α}-{β}>0 και 1>{α-β}≥0 δεν μπορεί να είναι δ=1 γιατί τότε το πρώτο μέλος της τελευταίας ισότητας θα ήταν θετικό ενώ το δεύτερο αρνητικό. . Έτσι δ=0 και {α-β}={α}-{β}.

<u>πρόταση 4</u>
Αν n{α}<1, $n\in\mathbb{N}$ τότε {nα}=n{α}.

<u>απόδειξη</u>

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Για n=1 είναι προφανής. Έστω ότι ισχύει για τον φυσικό n. Τότε θα έχουμε {(n+1)α}={nα+α}={nα}+{α}-δ με δ=0 ή 1. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι (n+1){α}<1 θα έχουμε {(n+1)α}=n{α}+{α}=(n+1){α}.

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

<u>πρόταση 5</u>
Έστω ε>0 και α άρρητος αριθμός. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε να ισχύει {nα}<ε.

<u>απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ε<1. Εκλέγουμε φυσικό Ν έτσι ώστε $N>\frac{1}{\varepsilon}$ και θεωρούμε τους αριθμούς αt-[αt]={αt} με t=0,1,2,...,N καθώς και τα διαστήματα:
[$0,\frac{1}{N}$), [$\frac{1}{N},\frac{2}{N}$), [$\frac{2}{N},\frac{3}{N}$), ...,[$\frac{N-1}{N},1$) τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι το διάστημα [0,1). Δεδομένου ότι οι αριθμοί {αt} ανήκουν όλοι στο διάστημα [0,1) ο καθένας τους θα ανήκει σε κάποιο από τα παραπάνω υποδιαστήματα. Το πλήθος όμως των υποδιαστημάτων είναι Ν ενώ οι αριθμοί {αt} είναι σε πλήθος Ν+1[1].
Θα υπάρχουν λοιπόν τουλάχιστον δύο αριθμοί {κα} και {λα} με {κα}>{λα} οι οποίοι θα ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα. Έτσι 0<{κα}-{λα}< $\frac{1}{N}$ <ε και σύμφωνα με την πρόταση 3 θα έχουμε 0<{(κ-λ)α}<ε.
Αν κ-λ>0 η πρόταση έχει αποδειχθεί.
Αν κ-λ<0 θέτουμε -μ=κ-λ. Θα έχουμε λοιπόν 0<{-μα}<ε.
-μα=[-μα]+{-μα}
Έστω ν ο φυσικός για τον οποίο ν{-μα}<1<(ν+1){-μα} άρα 0<1-ν{-μα}<{-μα}.
-νμα=ν[-μα]+ν{-μα} επομένως {-νμα}=ν{-μα}.
Έτσι 1-ν{-μα}=1-{-νμα}=1-1+{νμα}={νμα}<{-μα}<ε. Θέτοντας n=νμ προκύπτει η αλήθεια της πρότασης.

<u>Θεώρημα</u>
Έστω α άρρητος. Αν $\xi\in[0,1]$ τότε ο ξ είναι οριακό σημείο της ακολουθίας {nα}.

<u>απόδειξη</u>

Έστω $\xi\in[0,1]$. Εφαρμόζουμε την πρόταση (5) και έχουμε ότι δοθέντος ε>0 με 0<ε<ξ μπορούμε να εκλέξουμε φυσικό αριθμό κ, έτσι ώστε {κα}<ε. Λαμβάνουμε

1Αυτό ισχύει διότι αν υπήρχαν κ,λ φυσικοί με 0≤κ<λ≤Ν με {κα}={λα} τότε κα-[κα]=λα-[λα] άρα $\alpha=\frac{[\kappa\alpha]-[\lambda\alpha]}{\kappa-\lambda}$ δηλαδή ο α θα ήταν ρητός αριθμός, πράγμα άτοπο. Έτσι όλοι οι αριθμοί {αt} είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

τον φυσικό λ για τον οποίο λ{κα}≤ξ<λ{κα}+{κα}. Έτσι 0≤ξ-λ{κα}<{κα}<ε.
Αφού ξ≤1 η ανίσωση δίνει ότι λ{κα}≤1 και επειδή δεν μπορεί να ισχύει η ισότητα (αφού α άρρητος) με βάση την πρόταση (4) μπορούμε να γράψουμε 0≤ξ-{λκα}<ε γεγονός που επαληθεύει την πρόταση για n=λκ.
Αν τύχει να είναι ξ={λκα}, μπορούμε να εκλέξουμε μ>κλ έτσι ώστε {μα}<ε. Τότε επιλέγοντας λ' έτσι ώστε λ'{μα}≤ξ<(λ'+1){μα} δεν θα μπορούσε να είναι ξ=λ'{μα}={λ'μα} γιατί θα έπρεπε {λκα}={λ'μα} πράγμα αδύνατο αφού η ακολουθία {nα} με α άρρητο είναι 1-1.
Έτσι για κάθε ε>0 υπάρχει φυσικός ν έτσι ώστε 0<ξ-{να}<ε.

Εφαρμογή

Κάθε σημείο του διαστήματος [-1,1] είναι οριακό σημείο της ακολουθίας sin n.

απόδειξη

Έστω $\beta\in[-1,1]$ και γ πραγματικός τέτοιος ώστε sinγ=β.
Για κάθε ε>0 έστω δ>0 : |sinx-β|<ε για |χ-γ|<δ.
Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα και λαμβάνοντας $\alpha=\frac{1}{2\pi}$ και $\xi=\frac{\gamma}{2\pi}$

υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε $0<\frac{\gamma}{2\pi}-\{\frac{n}{2\pi}\}<\frac{\delta}{2\pi}$ ή $0<\gamma-2\pi\{\frac{n}{2\pi}\}<\delta$.

Άρα | $\sin(2\pi\{\frac{n}{2\pi}\})$ -β|<ε.

Όμως $2\pi\{\frac{n}{2\pi}\}=2\pi(\frac{n}{2\pi}-[\frac{n}{2\pi}])=n-2k\pi$ δηλαδή |sin n-β|<ε.

Dirichlet's approximation theorem

Αν α άρρητος και Ν φυσικός αριθμός, τότε υπάρχει ρητός $\frac{\gamma}{\beta}$ με 0<β≤Ν τέτοιος ώστε να ισχύει |α- $\frac{\gamma}{\beta}$ |< $\frac{1}{\beta N}$

απόδειξη

Στην πρόταση 5 δείξαμε ότι υπάρχουν φυσικοί κ,λ με 0≤κ,λ≤Ν έτσι ώστε

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

|{κα}-{λα}|< $\frac{1}{N}$. Έτσι | (κ-λ)α+[λα]-[κα] |< $\frac{1}{N}$. Αν κ-λ>0 θέτουμε β=κ-λ και γ=[κα]-[λα] ενώ αν κ-λ<0 θέτουμε β=λ-κ και γ=[λα]-[κα].

Θα έχουμε λοιπόν |βα-γ|< $\frac{1}{N}$ και τελικά |α- $\frac{\gamma}{\beta}$ |< $\frac{1}{\beta N}$.

Πρόταση 6

Αν α άρρητος υπάρχουν άπειροι ρητοί $\frac{\gamma}{\beta}$ με $\beta \wedge \gamma = 1$ τέτοιοι ώστε να ισχύει |α- $\frac{\gamma}{\beta}$ |< $\frac{1}{\beta^2}$

απόδειξη

Είδαμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό Ν>0 υπάρχουν Γ_N, B_N με $0<B_N\leq N$ τέτοιοι ώστε να είναι | $\alpha - \frac{\Gamma_N}{B_N}$ |< $\frac{1}{NB_N} \leqslant \frac{1}{B_N^2}$. Απλοποιώντας το κλάσμα $\frac{\Gamma_N}{B_N}$ παίρνουμε το κλάσμα $\frac{\gamma_N}{\beta_N}$ με $\gamma_N \wedge \beta_N = 1$ και $\gamma_N\leq\Gamma_N$, $\beta_N\leq B_N$, $\frac{\Gamma_N}{B_N} = \frac{\gamma_N}{\beta_N}$. Από την $\beta_N\leq B_N$ προκύπτει ότι $\frac{1}{B_N} \leqslant \frac{1}{\beta_N}$. Έτσι θα ισχύει τελικά | $\alpha - \frac{\gamma_N}{\beta_N}$ |≤ $\frac{1}{\beta_N^2}$.

Το πλήθος των ρητών $\frac{\gamma_N}{\beta_N}$ με $\gamma_N \wedge \beta_N = 1$ είναι άπειρο, γιατί αν ήταν πεπερασμένο θα υπήρχε κάποιος ρητός $\frac{\gamma_\kappa}{\beta_\kappa}$ για τον οποίο η παράσταση | $\alpha - \frac{\gamma_\kappa}{\beta_\kappa}$ | θα έπαιρνε την ελάχιστη τιμή της. Αφού ο α είναι άρρητος, θα είναι | $\alpha - \frac{\gamma_\kappa}{\beta_\kappa}$ |>0.

Έστω φυσικός αριθμός ν, για τον οποίο έχουμε $\frac{1}{\nu}$ <| $\alpha - \frac{\gamma_\kappa}{\beta_\kappa}$ |. Παρατηρούμε ότι | $\alpha - \frac{\gamma_\kappa}{\beta_\kappa}$ |≤| $\alpha - \frac{\gamma_\nu}{\beta_\nu}$ |< $\frac{1}{\nu\beta_\nu} \leqslant \frac{1}{\nu}$ <| $\alpha - \frac{\gamma_\kappa}{\beta_\kappa}$ | άτοπο.

Kronecker's approximation theorem
Αν α άρρητος , χ πραγματικός και Ν θετικός ακέραιος, τότε υπάρχουν ακέραιοι ν και μ με ν>Ν τέτοιοι ώστε | $\nu\alpha-\mu-\chi$ |< $\frac{3}{\nu}$

απόδειξη

Σύμφωνα μετην πρόταση 6 υπάρχουν ακέραιοι κ,λ με κ>2Ν , $\kappa\wedge\lambda=1$ και |κα-λ|< $\frac{1}{k}$ (1)

Υπάρχει ακέραιος Μ τέτοιος ώστε |κχ-Μ|≤ $\frac{1}{2}$.

Γράφουμε Μ=ωλ-ψκ με ω,ψ ακέραιους και |ω|≤ $\frac{\kappa}{2}$

Παρατηρούμε ότι κ(ωα-ψ-χ)=κωα-κψ-κχ=κωα+Μ-ωλ-κχ=ω(κα-λ)-(κχ-Μ).

Θα έχουμε |κ(ωα-ψ-χ|≤|ω||κα-λ|+|κχ-Μ|≤ $\frac{\kappa}{2}\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{2}=1$. Δηλαδή |ωα-ψ-χ|≤ $\frac{1}{\kappa}$.

Θέτουμε ν=κ+ω, μ=λ+ψ.

Είναι $N<\frac{\kappa}{2}\leqslant\nu\leqslant\frac{3}{2}\kappa$.

|να-μ-χ=|κα+ωα-λ-ψ-χ|=|(ωα-ψ-χ)+(κα-λ)|≤|ωα-ψ-χ|+|κα-λ|< $\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa}=\frac{2}{\kappa}\leqslant\frac{3}{\nu}$.

Θα έχουμε τελικά |να-μ-χ|< $\frac{3}{\nu}$.

Πρόταση 7
Έστω f συνεχής συνάρτηση με πραγματικές τιμές η οποία είναι περιοδική και η περίοδός της α, είναι άρρητος αριθμός. Τότε το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας f(n) με $n\in\mathbb{Z}$ είναι το διάστημα [μ,Μ] όπου μ=min{ f(x) / $x\in\mathbb{R}$ } και Μ=max{ f(x) / $x\in\mathbb{R}$ }.

απόδειξη

Αφού η f είναι συνεχής και περιοδική, θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Έτσι για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 ώστε για κάθε $\chi,\psi\in\mathbb{R}$ με |χ-ψ|<δ ισχύει |f(χ)-f(ψ)|<ε.
Σύμφωνα με το θεώρημα Κρόνεκερ το σύνολο $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θα υπάρχουν λοιπόν για κάθε πραγματικό αριθμό χ,

ακέραιοι m,n έτσι ώστε |m-(nα+χ)|<δ και επομένως |f(m)-f(χ)|<ε (2)
Αν λοιπόν $\xi \in [\mu, M]$ θα υπάρχει $\chi \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ξ=f(χ) κι έτσι από την (2) προκύπτει η αλήθεια της πρότασης 7.

<u>Πόρισμα</u>

Το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας cosn , $n \in \mathbb{N}$ είναι το διάστημα [-1,1].

<u>απόδειξη</u>

Προκύπτει άμεσα από την πρόταση 7 και το γεγονός ότι η συνάρτηση y=cosx είναι άρτια.

Βιβλιογραφία

1. John H. Staib and Miltiades S. Demos
Mathematics Magazine
Vol. 40, No. 4 (Sep., 1967), pp. 210-213

2. Ivan Niven-Herbert Zuckerman-Hugh Montgomery
An introduction to the theory of numbers

3. *An Introduction to the Theory of Numbers* by G. H. Hardy and E. M. Wright