ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1)$ **. Να αποδειχτεί ότι η τιμή της παραγώγου οποιασδήποτε τάξης της f στο 0, είναι τέλειο τετράγωνο.**

Απόδειξη

Αν αναπτύξουμε την f σε δυναμοσειρά κέντρου 0 και γράψουμε $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1) τότε αφού η f είναι άρτια θα ισχύει $a_{2n+1}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $a_{2n}=\frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1))^2}{(2n)!}$

Αφού $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ θα είναι $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση βρίσκουμε $f'(x)=\frac{x}{1-x^2}f(x)\Leftrightarrow(1-x^2)f'(x)=xf(x)$ (2). Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τις εκφράσεις που προκύπτουν από τα αντίστοιχα αναπτύγματα των παραπάνω δυναμοσειρών έχουμε: $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}x^n-(n+1)a_{n+1}x^{n+2}]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}$ (3). Δεδομένου τώρα ότι ισχύει $a_{2n+1}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$, ομαδοποιώντας τους όρους του πρώτου αθροίσματος προκύπτει η σχέση $\sum_{n=0}^{\infty}[(2n+2)a_{2n+2}-2na_{2n}]x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n+1}$ κι έτσι εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοβαθμίων όρων προκύπτει $(2n+2)a_{2n+2}=(2n+1)a_{2n}$ για κάθε n=0,1,2,... ή ισοδύναμα θα έχουμε $2na_{2n}=(2n-1)a_{2n-2}\Leftrightarrow a_{2n}=\frac{2n-1}{2n}a_{2n-2}$ για κάθε n=1,2,3,... (4). Από την τελευταία αναδρομική σχέση προκύπτει $a_{2n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}a_0$. Όμως a_0=1 και πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος με τον αριθμητή βρίσκουμε τελικά

$$a_{2n}=\frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1))^2}{2n!} \quad .$$

Όμως τώρα αφού ως γνωστόν $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ θα είναι $f^{(2n)}(0)=(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1))^2$ ενώ $f^{(2n+1)}(0)=0$, συνεπώς ο ισχυρισμός μας έχει αποδειχτεί.

Άλλη λύση

Αν θέσουμε $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n}f(x)\quad n=0,1,2,3,\ldots$ (5) όπου $P_n(x)$ πολυώνυμο n$^{\text{στου}}$ βαθμού, τότε έχουμε $P_0(x)=1$ και $P_1(x)=x$.
Αν παραγωγίσουμε την (5) προκύπτει

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{P'_n(x)(1-x^2)^n-P_n(x)n(1-x^2)^{n-1}(-2x)}{(1-x^2)^{2n}}f(x)+\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n}\frac{x}{(1-x^2)}f(x)\quad=$$

$$\frac{P'_n(x)(1-x^2)+(2n+1)xP_n(x)}{(1-x^2)^{(n+1)}}f(x)$$

Έτσι για το πολυώνυμο $P_n(x)$ ισχύει η αναδρομική σχέση

$$P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)+(1-x^2)P'_n(x),\quad P_0(x)=1,\ P_1(x)=x.\quad (6)$$

Είναι $f^{(n)}(0)=P_n(0)f(0)=P_n(0)$ άρα για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι η τιμή του πολυωνύμου $P_n(0)$ είναι τέλειο τετράγωνο.
Για να το δείξουμε αυτό θα αποδείξουμε πρώτα ότι τα πολυώνυμα που ορίζονται με τους δυο παρακάτω αναδρομικούς τύπους, ταυτίζονται.
Τύπος Α: $P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)+(1-x^2)n^2P_{n-1}(x),\quad P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$
Τύπος Β: $P'_n(x)=n^2P_{n-1}(x),\quad P_n(0)=(n-1)^2P_{n-2}(0),\ P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$

Έστω λοιπόν ότι μια ακολουθία πολυωνύμων $P_n(x)$ ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο Α για κάθε φυσικό αριθμό n>1. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι οι όροι της ακολουθίας αυτής ικανοποιούν και τον αναδρομικό τύπο Β. Πράγματι για n=1 βρίσκουμε από τον Α ότι $P_2(x)=2x^2+1$. Από τη σχέση $P'_2(\chi)=4P_1(x)$ βρίσκουμε $P_2(x)=2x^2+c$ και επειδή $P_2(0)=(2-1)^2P_0(0)=1$, η σταθερά c=1 οπότε το $P_2(x)$ επαληθεύει τον τύπο Β. Έστω ότι ο τύπος Β επαληθεύεται για όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι του k>2. Θα αποδείξουμε ότι $P'_{k+1}(x)=(k+1)^2P_k(x)$. Αφού η ακολουθία $P_n(x)$ ικανοποιεί τον τύπο Α θα έχουμε $P_{k+1}(x)=(2k+1)xP_k(x)+(1-x^2)k^2P_{k-1}(x)$.
Παραγωγίζοντας αυτή την τελευταία σχέση προκύπτει

$P'_{k+1}(x)=(2k+1)P_k(x)+(2k+1)xP'_k(x)-2xk^2P_{k-1}(x)+k^2(1-x^2)P'_{k-1}(x)$. Λαμβάνοντας τώρα υπόψιν την επαγωγική υπόθεση η παραπάνω σχέση γίνεται

$$P'_{k+1}(x)=(2k+1)P_k(x)+(2k+1)xk^2P_{k-1}(x)-2xk^2P_{k-1}(x)+k^2(1-x^2)(k-1)^2P_{k-2}(x)\quad\Leftrightarrow$$

$$P'_{k+1}(x)=(2k+1)P_k(x)+k^2[(2k-1)P_{k-1}(x)+(1-x^2)(k-1)^2P_{k-2}(x)]\quad\Leftrightarrow$$

$$P'_{k+1}(x)=(2k+1)P_k(x)+k^2P_k(x)=(k+1)^2P_k(x)\quad.$$

Έστω τώρα ότι μια ακολουθία πολυωνύμων $P_n(x)$ ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο Β για κάθε φυσικό αριθμό n>1. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι οι όροι της ακολουθίας αυτής ικανοποιούν και τον αναδρομικό τύπο Α. Ισχύει λοιπόν $P'_{n+1}(x)=(n+1)^2P_n(x)$ Για n=2 ο ισχυρισμός είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση Α για όλους τους φυσικούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για το φυσικό αριθμό n+1, δηλαδή θα δείξουμε ότι

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

$P_{n+2}(x)=(2n+3)xP_{n+1}(x)+(1-x^2)(n+1)^2P_n(x)$ (7)
Σύμφωνα με την υπόθεση ισχύει $P'_{n+1}(x)=(n+1)^2P_n(x)$ (7.1)
Από την άλλη παραγωγίζοντας το δεύτερο μέλος έστω Φ(χ) της (7) έχουμε
$\Phi'(x)=(2n+3)P_{n+1}(x)+(2n+3)xP'_{n+1}(x)+(n+1)^2(-2x)P_n(x)+(1-x^2)(n+1)^2P'_n(x)$ άρα
$\Phi'(x)=(2n+3)P_{n+1}(x)+(n+1)^2[(2n+1)xP_n(x)+(1-x^2)n^2P_{n-1}(x)]$. Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση η παράσταση μέσα στην αγκύλη ισούται με $P_{n+1}(x)$. Άρα η τελευταία σχέση γίνεται $\Phi'(x)=(n+2)^2P_{n+1}(x)$ (7.2)
Από τις (7.1) και (7.2) προκύπτει ότι $P'_{n+2}(x)=\Phi'(x)$ επομένως $P_{n+2}(x)=\Phi(x)+c$. Θέτοντας x=0 θα έχουμε $P_{n+2}(0)=\Phi(0)+c$ δηλαδή $(n+1)^2P_n(0)=(n+1)^2P_n(0)+c$, άρα c=0 και η ισχύς της (7) έχει αποκατασταθεί.
Από την αναδρομική σχέση $P_n(0)=(n-1)^2P_{n-2}(0)$ προκύπτει $P_{2n}(0)=(2n-1)^2P_{2n-2}(0)$, n=1,2,3,... κι επομένως $P_{2n}(0)=(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1))^2$ σχέση που σύμφωνα με τα παραπάνω μας δείχνει ότι η παράγωγος οποιασδήποτε τάξης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1)$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.