

1. Αν a ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας να αποδειχτεί ότι:
 $(a^κ-1, a^λ-1) = a^{(κ,λ)}-1$ για όλους τους θετικούς ακέραιους $κ, λ$.

ΛΥΣΗ

Έστω $δ=(κ,λ)$ και $Δ=(a^κ-1, a^λ-1)$. Τότε $κ=δκ'$, $λ=δλ'$ κι έτσι
 $a^κ-1 = a^{δκ'}-1 = (a^δ-1)K$, $a^λ-1 = (a^δ-1)Λ$ με $K, Λ$ φυσικούς αριθμούς.

Θα έχουμε λοιπόν $Δ=(a^κ-1, a^λ-1) = (a^δ-1)(K, Λ)$. Άρα $a^δ-1/Δ$ (1)

Από την σχέση $δ=(κ,λ)$ προκύπτει πως υπάρχουν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί $μ, ν$ τέτοιοι ώστε $δ=μκ-νλ$ ¹. Θα είναι συνεπώς $a^δ-1 = (a^{μκ}-a^{νλ})a^{-νλ}$ κι επομένως $a^{νλ}(a^δ-1) = a^{κμ}-1 - (a^{λν}-1) = (a^κ-1)K' - (a^λ-1)Λ'$.

Όμως $Δ/(a^κ-1)$ και $Δ/(a^λ-1)$ άρα $Δ/a^{νλ}(a^δ-1)$ (2).

Είναι $(Δ, a) = 1$ γιατί διαφορετικά οι $Δ$ και a θα είχαν κάποιον πρώτο διαιρέτη $ρ$ για τον οποίο απο τη σχέση $Δ/(a^κ-1)$ θα ήταν $ρ/1$ άτοπο. Φυσικά θα είναι και $(Δ, a^{νλ}) = 1$ οπότε η σχέση (2) μας δίνει ότι $Δ/(a^δ-1)$ (3).

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι $Δ = a^δ-1$.

Κασαπίδης Γεώργιος

¹ Είναι γνωστό πως αν $(κ,λ)=δ$ τότε υπάρχουν ακέραιοι $μ, ν$ ώστε $μκ+νλ=δ$. Εδώ είναι $κ, λ, δ > 0$ άρα δεν μπορεί να είναι οι $μ, ν$ αρνητικοί και οι δυο. Αν $μ > 0$ και $ν < 0$ τότε γράφουμε $δ = μκ - λ(-ν)$. Αν $μ < 0$ και $ν > 0$ τότε $δ = μκ + νλ = κ(μ+μ'λ) - λ(κμ'-ν)$ όπου ο $κ'$ επιλέγεται έτσι ώστε $μ+μ'λ > 0$ και $κμ'-ν > 0$. Αν $κ > 0$ και $λ > 0$ τότε $δ = μκ + νλ = κ(μ+λμ') - λ(κμ'-ν)$ όπου το $μ'$ επιλέγεται έτσι ώστε $κμ'-ν > 0$. Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχουν $μ, ν$ μη μηδενικοί φυσικοί ώστε $δ = κμ - λν$.