Κασαπίδης Γεώργιος

12. Δείξτε ότι [χ]! = $\prod_{p\le\chi} p^{\alpha(p)}$ **όπου** $\alpha(p)=\sum_{m=1}^{\infty}[\frac{\chi}{p^m}]$

<u>απόδειξη 1η</u>

Έστω [χ]=α. Θα αποδείξουμε ότι[1] $\alpha!=\prod_{p\le\alpha} p^{\alpha(p)}$

όπου $\alpha(p)=\sum_{m=1}^{\infty}[\frac{\alpha}{p^m}]$. Θα κάνουμε την απόδειξη με επαγωγή πάνω στο α ≥ 1. Για α=1 είναι προφανής (με κενό τρόπο). Για α=2 είναι 2!=2 $\prod_{p\le 2} p^{\alpha(p)}=2^1$ αφού $\alpha(p)=\sum_{m=1}^{\infty}[\frac{\alpha}{p^m}]=\alpha(2)=[\frac{2}{2}]=1$.

Ας θέσουμε $\alpha!=p^n b$ όπου ο b δεν διαιρείται από τον p.

Θα δείξουμε ότι n=α(p). Αν α=pq+r με 0≤ r <p, τότε $q=[\frac{\alpha}{p}]$ και τα πολλαπλάσια του p που δεν ξεπερνούν τον α είναι οι αριθμοί p, 2p, 3p,...qp. Θα έχουμε συνεπώς $p^q\, q!=p^n\, c$ όπου ο p δεν διαιρεί τον c. Αν λοιπόν ν είναι η ακριβής δύναμη του p, η οποία διαιρεί τον q! θα ισχύει n=q+ν. Αφού q<α από την υπόθεση της επαγωγής θα έχουμε ότι

$$\nu=[\frac{q}{p}]+[\frac{q}{p^2}]+[\frac{q}{p^3}]+\ldots=[\frac{[\frac{\alpha}{p}]}{p}]+[\frac{[\frac{\alpha}{p}]}{p^2}]+\ldots=[\frac{\alpha}{p^2}]+[\frac{\alpha}{p^3}]+\ldots$$ άρα

τελικά θα έχουμε $n=[\frac{\alpha}{p}]+[\frac{\alpha}{p^2}]+[\frac{\alpha}{p^3}]+\ldots$ ο.ε.δ.

1 $[\frac{x}{k}]=[\frac{[x]}{k}]$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}\ \kappa\alpha\iota\ k\in\mathbb{N}, k>0$ Πράγματι γράφοντας [χ]=κ τ+υ με 0≤υ≤κ-1 θα έχουμε $\frac{[\chi]}{k}=\tau+\frac{\upsilon}{k}$, άρα, $[\frac{[\chi]}{k}]=\tau$ και επίσης $[\frac{\chi}{k}]=[\frac{[x]+\theta}{k}], 0\le\theta<1$ άρα $[\frac{\chi}{k}]=[\tau+\frac{\upsilon+\theta}{k}]$, με $\frac{\upsilon+\theta}{k}<\frac{k-1+1}{k}=1$
Συνεπώς $[\frac{x}{k}]=[\frac{[x]}{k}]$.

<u>απόδειξη 2η</u>

Ορίζουμε τη συνάρτηση Λ(n)={ $\begin{matrix} logp & \alpha\nu \;\; n=p^m, p \;\; \pi\rho\acute{\omega}\tau o\varsigma \;\;, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{matrix}$

Παρατηρούμε ότι αν $n=\prod_{k=1}^{t} p_k^{n_k}$ τότε $\sum_{d/n} \Lambda(d)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{m=1}^{n_k} \Lambda(p_k^m)$ άρα

$\sum_{d/n} \Lambda(d)=\sum_{k=1}^{t} n_k logp_k=\sum_{k=1}^{t} logp_k^{n_k}=\log\prod_{k=1}^{t} p_k^{n_k}=logn$ Δείξαμε δηλαδή ότι $\sum_{d/n} \Lambda(d)=logn$ για κάθε φυσικό αριθμό n>0.

Θα έχουμε επομένως $\sum_{n\le x} logn=\sum_{n\le x}\sum_{d/n} \Lambda(d)=\sum_{n\le x} \Lambda(n)[\frac{x}{n}]$ κι έτσι

$$\log[x]!=\sum_{p\le x}\sum_{m=1}^{\infty} \Lambda(p^m)[\frac{x}{p^m}]=\sum_{p\le x} logp\sum_{m=1}^{\infty}[\frac{x}{p^m}]=\sum_{p\le x} logp^{\alpha(p)}$$

άρα $\log[x]!=\log\prod_{p\le x} p^{\alpha(p)}$ και τελικά $[\chi]!=\prod_{p\le x} p^{\alpha(p)}$.