Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

13. Στο θέμα (12) δείξτε επιπλέον ότι αν α φυσικός αριθμός με α>0 και $\alpha=\alpha_n p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\alpha_1 p+\alpha_0$ με $0\leq\alpha_i<p$ είναι η ανάλυση του α στη βάση p, τότε

$$a(p)=\sum_{m=1}^{\infty}[\frac{a}{p^m}]=\frac{a-(a_n+a_{n-1}+\ldots a_1+a_0)}{p-1}$$

Στη συνέχεια να δειχτεί ότι η ακριβής δύναμη p^m του πρώτου p, η οποία διαιρεί τον αριθμό $\binom{a+b}{a}$ ισούται με το άθροισμα των "κρατούμενων" κατά τον υπολογισμό του αθροίσματος a+b στη βάση p.

Απόδειξη

Όπως δείξαμε σε προηγούμενο γύμνασμα α!= $\prod_{p\leq\chi} p^{\alpha(p)}$ με $\alpha(p)=\sum_{m=1}^{\infty}[\frac{\alpha}{p^m}]$.

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $a=a_k p^k+a_{k-1}p^{k-1}+\ldots+a_1+a_0$ τότε

$$[\frac{\alpha}{p}]=a_k p^{k-1}+\ldots+a_1$$

$$[\frac{a}{p^2}]=a_k p^{k-2}+\ldots+a_2$$

.
.
.

$$[\frac{a}{p^k}]=a_{k.}$$

Έτσι

$$\sum_{i=o}^{\infty}[\frac{a}{p^i}]=a_1+a_2(p+1)+a_3(p^2+p+1)+\ldots+a_k(p^{k-1}+p^{k-2}+\ldots+p+1)$$

$$\frac{1}{p-1}(a_1(p-1)+a_2(p^2-1)+\ldots+a_k(p^k-1))=\frac{1}{p-1}(a-(a_0+a_1+\ldots+a_k))$$

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Το 1852 ο Kummer χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα του Legendre, κατάφερε να υπολογίσει την ακριβή δύναμη p^m του p που διαιρεί το διωνυμικό συντελεστή $\binom{a+b}{a}=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$ όπου $a\geq 1,\ b\geq 1.$

Έστω

$$a=a_0+a_1p+\ldots+a_tp^t$$
$$b=b_0+b_1p+\ldots+b_tp^t \quad \text{όπου } 0\leq a_i\leq p-1,\ 0\leq b_i\leq p-1 \ \ \text{και } \alpha_t \text{ ή } b_t\neq 0$$

Θέτουμε $S_a=\sum_{i=0}^{t}a_i$, $S_b=\sum_{i=0}^{t}b_i$ τα αθροίσματα των p-αδικών ψηφίων των αριθμών α,b. Έστω επίσης $c_i,\ 0\leq c_i\leq p-1,\ \text{και } \varepsilon_i=0 \text{ ή } 1$ οριζόμενα ως εξής:

$$a_0+b_0=\varepsilon_0p+c_0$$
$$\varepsilon_0+a_1+b_1=\varepsilon_1p+c_1$$
$$\varepsilon_1+a_2+b_2=\varepsilon_2p+c_2$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_{t-1}+a_t+b_t=\varepsilon_tp+c_t$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις εξισώσεις αντίστοιχα με $1, p, p^2, \ldots$ και προσθέτοντας τις προκύπτουσες σχέσεις λαμβάνουμε

$$a+b+\varepsilon_0p+\varepsilon_1p^2+\ldots+\varepsilon_{t-1}p^t=\varepsilon_0p+\varepsilon_1p^2+\ldots+\varepsilon_tp^{t+1}+c_0+c_1p+\ldots+c_tp^t$$

Έτσι, $a+b=c_0+c_1p+\ldots+c_tp^t+\varepsilon_tp^{t+1}$ και αυτή είναι η παράσταση του αθροίσματος α+b στη βάση p.

Προσθέτοντας τώρα τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη, βρίσκουμε

$$S_a+S_b+(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{t-1})=(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_t)p+S_{a+b}-\varepsilon_t$$

Από το αποτέλεσμα του Legendre θα έχουμε τελικά

$$(p-1)m=(a+b)-S_{a+b}-a+S_a-b+S_b=(p-1)(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_t) \quad \text{ο.ε.δ.}$$