ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Εξίσωση Pell
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Η εξίσωση χ^2-dψ^2=1 με $\sqrt{d}$ άρρητο, έχει τουλάχιστον μια λύση (χ,ψ) με χ,ψ ακέραιους και χ>1,ψ>0.

<u>Απόδειξη</u>

Αφού $\sqrt{d}$ είναι άρρητος, υπάρχουν απείρου πλήθους ρητοί $\frac{\alpha}{\beta}$ με α,β>0 και $\alpha \wedge \beta = 1$ έτσι ώστε | $\sqrt{d}$ - $\frac{\alpha}{\beta}$ | < $\frac{1}{\beta^2}$.

Θα έχουμε λοιπόν $-\frac{1}{\beta^2}<\sqrt{d}-\frac{\alpha}{\beta}<\frac{1}{\beta^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{\beta}<\beta\sqrt{d}-\alpha<\frac{1}{\beta}$. Έτσι προκύπτει ότι

$\alpha<\beta\sqrt{d}+\frac{1}{\beta}\Leftrightarrow\alpha+\beta\sqrt{d}<2\sqrt{d}+\frac{1}{\beta}$.

$|\alpha-\beta\sqrt{d}|(\alpha+\beta\sqrt{d})<(2\beta\sqrt{d}+\frac{1}{\beta})|\alpha-\beta\sqrt{d}|\Leftrightarrow|\alpha^2-d\beta^2|<2\sqrt{d}+1$.

Αν $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\kappa$ είναι οι ακέραιοι μεταξύ των αριθμών $-2\sqrt{d}-1,\ 2\sqrt{d}+1$ τότε μια τουλάχιστον απο τις εξισώσεις α^2-dβ^2=λ_i θα έχει άπειρες λύσεις.

Αν λ_i=1 έχουμε το ζητούμενο.

Αν λ_i=-1, τότε το ζεύγος (α^2+dβ^2,2αβ) είναι λύση.

Υποθέτουμε ότι |λ_i|>1. Αφού η εξίσωση α^2-dβ^2=λ_i=λ έχει άπειρες λύσεις, θα υπάρχουν λύσεις (α,β), (γ,δ) με (α,β)≠ ±(γ,δ) και $\alpha\equiv\gamma\, mod\lambda,\ \ \beta\equiv\delta\, mod\lambda$.

Θα έχουμε λοιπόν α^2-dβ^2=λ και γ^2-dδ^2=λ άρα

(α^2-dβ^2)(γ^2-dδ^2)=λ^2 ⇔ $\alpha^2\gamma^2$-d$\alpha^2\delta^2$-d$\beta^2\gamma^2$+$d^2\beta^2\delta^2$=λ^2 ⇔

(αγ-dβδ)^2-d(αδ-βγ)^2=λ^2. (1) Όμως $\alpha\delta\equiv\beta\gamma\, mod\lambda$ άρα λ^2/(αγ-dβδ)^2

οπότε λ/αγ-dβδ. Θα υπάρχουν επομένως αριθμοί $\chi,\psi\in\mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε αγ-dβδ=λχ και αδ-βγ=λψ. Έτσι η (1) γίνεται $\lambda^2\chi^2$-d$\lambda^2\psi^2$=λ^2, δηλαδή

χ^2-dψ^2=1.

Αν ψ=0 τότε χ=±1 άρα αδ-βγ=0 και αγ-dβδ=±λ. Τότε

$(\alpha+\beta\sqrt{d})(\gamma-\delta\sqrt{d})=\alpha\gamma-d\beta\delta-\sqrt{d}(\alpha\delta-\beta\gamma)=\pm\lambda=\pm(\alpha^2-d\beta^2)$. Θα είναι λοιπόν (α,β)=±(γ,δ) άτοπο. Πρέπει επομένως να είναι ψ≠0.

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Να λυθεί η εξίσωση (Pell) χ^2-dψ^2=1 με d φυσικό και $\sqrt{d}$ άρρητο.

Απόδειξη

Όπως αποδείξαμε σε προηγούμενη πρόταση, όταν ο d δεν είναι τετράγωνο ακεραίου, η εξίσωση χ^2-dψ^2=1 έχει πάντα λύση (χ_1,ψ_1) με χ_1>1 και ψ_1≠0. Αρκεί να βρούμε (λόγω συμμετρίας) μόνο τις λύσεις (χ,ψ) για τις οποίες χ>0 και ψ>0.

Παρατηρούμε ότι $(\chi_1+\psi_1\sqrt{d})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_1^{n-k}(\psi_1\sqrt{d})^k$ = $\chi_n+\psi_n\sqrt{d}$ όπου

$\chi_n=\sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{21}\chi_1^{n-21}\psi_1^{21}d^l$ και $\psi_n=\sum_{l=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{21}\chi_1^{n-21-1}\psi_1^{21+1}d^l$.

Θα έχουμε λοιπόν

$$\chi_n^2-d\psi_n^2=(\chi_n+\psi_n\sqrt{d})(\chi_n-\psi_n\sqrt{d})=(\chi_1+\psi_1\sqrt{(d)})^n(\chi_1-\psi_1\sqrt{d})^n=(\chi_1^2-d\psi_1^2)^n=1$$

Άρα το ζεύγος (χ_n,ψ_n) είναι επίσης λύση της εξίσωσης. Δηλαδή βλέπουμε ότι κάθε λύση σε θετικούς ακεραίους παράγει άπειρες άλλες θετικές λύσεις. Θα δείξουμε ότι αυτές είναι και οι μοναδικές θετικές λύσεις.

Θεωρούμε το σύνολο P={ $a\in\mathbb{N}$ / $a>1\, και\, a^2-db^2=1\, για\, κάποιο\, b\in\mathbb{N}$ }. Το σύνολο P είναι μη κενό. Έστω χ_1 το ελάχιστο στοιχείο του P. Τότε θα υπάρχει ψ_1 φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε χ_1^2-dψ_1^2=1. Αν (α,β) είναι τυχαία άλλη λύση της εξίσωσης Pell, διαφορετική από τις (χ_n,ψ_n) με α,β>0, τότε α>χ_1 και άρα β>ψ_1.

Υπάρχει φυσικός αριθμός ν, τέτοιος ώστε

χ_ν<α<$\chi_{\nu+1}$ οπότε επίσης ψ_ν<β<$\psi_{\nu+1}$.

Θα έχουμε λοιπόν

$\chi_\nu+\psi_\nu\sqrt{d}<\alpha+\beta\sqrt{d}<\chi_{\nu+1}+\psi_{\nu+1}\sqrt{d}$ κι επομένως

$1<(\chi_\nu-\psi_\nu\sqrt{d})(\alpha+\beta\sqrt{d})<(\chi_\nu-\psi_\nu\sqrt{d})(\chi_{\nu+1}+\psi_{\nu+1}\sqrt{d})$ όμως

$(\chi_\nu-\psi_\nu\sqrt{d})(\chi_{\nu+1}+\psi_{\nu+1}\sqrt{d})=(\chi_\nu-\psi_\nu\sqrt{d})(\chi_\nu+\psi_\nu\sqrt{d})(\chi_1+\psi_1\sqrt{d})$ = $\chi_1+\psi_1\sqrt{d}$

προκύπτει λοιπόν ότι $1<(\chi_\nu-\psi_\nu\sqrt{d})(\alpha+\beta\sqrt{d})<\chi_1+\psi_1\sqrt{d}$.

Εκτελώντας τις πράξεις $(\chi_\nu-\psi_\nu\sqrt{d})(\alpha+\beta\sqrt{d})$ έχουμε:

$(\chi_v-\psi_v\sqrt{d})(\alpha+\beta\sqrt{d})=(\alpha\chi_v-\beta\psi_v d)+(\beta\chi_v-\alpha\psi_v)\sqrt{d}=\kappa+\lambda\sqrt{d}$ όπου $\kappa=\alpha\chi_v-\beta\psi_v d\,,\lambda=\beta\chi_v-\alpha\psi_v$.

Αφού λοιπόν είναι $(\chi_v-\psi_v\sqrt{d})(\alpha+\beta\sqrt{d})=\kappa+\lambda\sqrt{d}$
επίσης θα έχουμε $(\chi_v+\psi_v\sqrt{d})(\alpha-\beta\sqrt{d})=\kappa-\lambda\sqrt{d}$ οπότε προκύπτει ότι $\kappa^2-d\lambda^2=1$ και $1<\kappa+\lambda\sqrt{d}<\chi_1+\psi_1\sqrt{d}$ (1)

Από τη σχέση $\kappa^2-d\lambda^2=1$ συνάγουμε $(\kappa-\lambda\sqrt{d})(\kappa+\lambda\sqrt{d})=1$ κι έτσι θα πρέπει $0<\kappa-\lambda\sqrt{d}<1$. Οι αριθμοί κ,λ θα είναι θετικοί.

Αν $\kappa\geq\chi_1$ τότε $\kappa^2\geq\chi_1^2$ άρα $1+d\lambda^2\geq1+d\psi_1^2$ δηλαδή $\lambda\geq\psi_1$. Θα έχουμε επομένως $\kappa+\lambda\sqrt{d}\geq\chi_1+\psi_1\sqrt{d}$ άτοπο λόγω της σχέσης (1). Θα πρέπει επομένως να είναι $\kappa<\chi_1$ το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του το στοιχείο χ_1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου P.

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι όλες οι θετικές λύσεις της εξίσωσης $\chi^2-d\psi^2=1$ ορίζονται απο την ακολουθία ζευγών (χ_v,ψ_v).

Οι λύσεις για τις οποίες $\chi<0$ και $\psi<0$ ορίζονται απο τη σχέση
$\chi+\psi\sqrt{d}=-(\chi_1+\psi_1\sqrt{d})^n$

Οι λύσεις για τις οποίες $\chi>0$ και $\psi<0$ ορίζονται απο τη σχέση
$\chi+\psi\sqrt{d}=(\chi_1-\psi_1\sqrt{d})^n$

Οι λύσεις για τις οποίες $\chi<0$ και $\psi>0$ ορίζονται απο τη σχέση
$\chi+\psi\sqrt{d}=-(\chi_1-\psi_1\sqrt{d})^n=-(\chi_1+\psi_1\sqrt{d})^{-n}$

Παρατηρήσεις

1. Αφού $\chi_v+\psi_v\sqrt{d}=(\chi_1+\psi_1\sqrt{d})^v$ θα είναι επίσης $\chi_v-\psi_v\sqrt{d}=(\chi_1-\psi_1\sqrt{d})^v$ άρα
   $\chi_v=\frac{1}{2}[(\chi_1+\psi_1\sqrt{d})^v+(\chi_1-\psi_1\sqrt{d})^v]$ και
   $\psi_v=\frac{1}{2\sqrt{d}}[(\chi_1+\psi_1\sqrt{d})^v-(\chi_1-\psi_1\sqrt{d})^v]$
2. Μεταξύ των χ_v και ψ_v υπάρχει η εξής αναδρομική σχέση:
   $\chi_{v+1}+\psi_{v+1}\sqrt{d}=(\chi_v+\psi_v\sqrt{d})(\chi_1+\psi_1\sqrt{d})$ =
   $(\chi_1\chi_v+\psi_v\psi_1 d)+(\psi_1\chi_v+\chi_1\psi_v)\sqrt{d}$ άρα
   $\chi_{v+1}=\chi_1\chi_v+\psi_1\psi_v d$ και $\psi_{v+1}=\psi_1\chi_v+\chi_1\psi_v$.
3. Η εξίσωση $\chi^2-d\psi^2=1$ στη βιβλιογραφία αναφέρεται και ως εξίσωση Fermat ή εξίσωση Lagrange. Έχει προταθεί απο τον Fermat και λύθηκε από τον Lagrange το 1768.