ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Α' ΕΚΔΟΣΗ:17/01/2012

ΜΙΑ ΣΥΛΛΟΓΗ

30 ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 41 (από Περικλή Παντούλα)

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \dfrac{1}{1-x_0} - \dfrac{1}{x_0}$.

β. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο R για την οποία ισχύει $1 + x \leq f(x) \leq e^x$ για κάθε $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι :

i. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

ii. Αν η f είναι συνεχής στο R, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$, ώστε $\dfrac{f(x_0)}{2004} = x_0$.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ΑΣΚΗΣΗ 42 (από Χρήστο Τσιφάκη)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = -2x^5 - |z|x^3 + 2|z|^5$ με $x \in R$ και $z \in C^*$.

α. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, |z|)$

δ. Αν $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-f(x) + 2|z|^5}{\eta\mu^3 x} = 1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z.

Πηγή: http://www.study4exams.gr

ΑΣΚΗΣΗ 43 (από pito)

Δίνεται η συνεχής στο R συνάρτηση f και η συνάρτηση $g: R \to R$ με την ιδιότητα $g(x)f^2(x) = e^x g(x) + 1$ για κάθε $x \in R$ και $|f(0)| < 1$.

α. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

γ. Να δείξετε ότι $g(0) \le -1$

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)(e^x + x)[g(x)+e^x] = x[f(x-1)+x]$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1)$ και μία τουλάχιστον μη θετική ρίζα.

ΑΣΚΗΣΗ 44 (από Περικλή Παντούλα)

Μια συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(1) = \dfrac{1}{2}$ έχει την ιδιότητα $f(xy) = f(x) f\left(\dfrac{3}{y}\right) + f(y) f\left(\dfrac{3}{x}\right)$ για κάθε $x, y \in R^*$

α. Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(3) = \dfrac{1}{2}$

ii. $f\left(\dfrac{3}{x}\right) = f(x),\ x \in R$

iii. $f(xy) = 2f(x)f(y)$ και $f^2(x) = \dfrac{1}{4}$ για κάθε $x \in R$

β. Να βρεθεί ο τύπος της f .

ΑΣΚΗΣΗ 45 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : R \to R$ και η συνάρτηση $g : R \to R$ ώστε για κάθε $x \in R$ να ισχύει η σχέση $f(f(x)) = 2g(x) - x$

α. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της $h(x) = f(x) - g(x)$

γ. Έστω $x_0 \in R$ με $f(x_0) = x_0$

i. Να δείξετε ότι η C_f και η C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x+x_0-2)) + x + x_0 = 2f(x+x_0-2)+2$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(\ln x + x_0 + 1)) + \ln x + 1 < x_0$

Πηγή: Χ.Πατήλας (εκδόσεις Κωστόγιαννος)

ΑΣΚΗΣΗ 46 (από pito)

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύει $f(x) - f(y) = f(\dfrac{x}{y})$ για κάθε $x, y > 0$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ που έχει μοναδική ρίζα.

α. Να βρείτε το $f(1)$

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-2)+f(x)=f(5x-6)$

δ. Αν $f(x)<0$ για κάθε $x>1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ 47 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2-\ln(\sqrt{x-2}+1)$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=2$

ε. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της $y=x$

Πηγή: <u>Α.Μπάρλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)</u>

ΑΣΚΗΣΗ 48 (από Μπάμπη Στεργίου)

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα: $f(x+f(x+y))=f(2x)+y$ για κάθε $x,y\in R$.
Να αποδείξετε ότι :

α. $f(0)=0$

β. $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in R$

γ. η f είναι $1-1$

δ. η f έχει σύνολο τιμών το R.

ε. $f(x)=x$ για κάθε $x\in R$

ΑΣΚΗΣΗ 49 (από dennys)

Έστω η συνάρτηση $f(x)=ln(1-e^x)-ln(1+e^x)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f

β. Να Βρείτε το πρόσημο της $f(x)$

γ. Να βρείτε την μονοτονία της f

δ. Να βρείτε την f^{-1}

ε. Βρείτε το $m<0$ έτσι ώστε $f(m)=m$

στ. Αν $g(x)=f(x)-x, x<0$, να βρείτε την μονοτονία της $g(x)$

ζ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)-f(-1)<x+1$

η. Αν $h(x)=-ln(-x)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in R$ έτσι ώστε $f(c)=h(c)$

θ. Να βρείτε τα όρια: $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-1)x^3+x^2+6}{f(-3)x^2-x-2}$, $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{f(x)}-e^{f^{-1}(x)}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 50 (από Μπάμπη Στεργίου)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + \ln x$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

δ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της f .

ε. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$

στ. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x - 1$

ΑΣΚΗΣΗ 51 (από Γιάννη Σταματογιάννη)

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $2f(x) - \eta\mu f(x) = x$ για κάθε χ πραγματικό αριθμό

α. Να αποδείξετε ότι $|2f(x) - x| \le |f(x)|$

β. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| \le |x|$

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

ΑΣΚΗΣΗ 52 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{3x^2 + 30x + 95} - \dfrac{\lambda}{4}(3x + 5), x \in R, \lambda \in R$ και $h(x) = \dfrac{4x - 5}{3}, x \in R$

α. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση $f = goh$ ορίζεται για κάθε τιμή του $x \in R$ και έχει τύπο

$$f(x) = (goh)(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x$$

β. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

γ. Για εκείνη την τιμή του $\lambda \in R$ που το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x) + 2x}{x^4 + x - 14}$$

δ. Για την ίδια τιμή του $\lambda \in R$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu^3 x}{f(x) + x}$

ΑΣΚΗΣΗ 53 (από alexandropoulos)

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f\left(x+f\left(y\right)\right)=f\left(x\right)+y+1$ για κάθε $x,y\in R$.

Να δειχθεί ότι :

α. η f είναι αντιστρέψιμη.

β. ισχύει $f\left(2x\right)=f\left(x\right)+f^{-1}(x)+1$

γ. η f δεν είναι περιττή.

δ. $f(-1)=0$

ΑΣΚΗΣΗ 54 (από Μίλτο Παπαγρηγοράκη)

Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α,β με $\alpha<\beta$ και η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, τέτοια ώστε να ισχύουν: $f\left(\alpha\right)=2\beta$, $f\left(\beta\right)=2\alpha$ και $\left|f(x)\right|<2012$ για κάθε $x\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x=f\left(\beta\right)\eta\mu x+f\left(\alpha\right)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\left(0,\alpha+\beta\right]$

β. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $\Delta=\left[\alpha,\beta\right]$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f\left(\xi\right)=\alpha+\beta$.

ii. Να αποδείξετε ότι η C_f της f τέμνει την $y=2x$ σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o\in\left(\alpha,\beta\right)$.

γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)\eta\mu 4x}{x^2+1}$

δ. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h:R\to R$ τέτοια ώστε $f(x)-h(x)=2004x$, για κάθε $x\in R$. Υποθέτουμε ακόμη ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει δύο λύσεις ετερόσημες ρ_1,ρ_2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h\left(x\right)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(\rho_1,\rho_2\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 55 (από dennys)

Δίνονται οι $1-1$ συναρτήσεις $f,g:R\to R$ και ισχύει

$f(x)-(fog^{-1})(x)=8$ και $3(fog)(x)+2(fog^{-1})(x)=10x-7$ για κάθε $x\in R$

α. Να βρείτε τις $f(x),g(x)$

β. Έστω συνάρτηση $h(x):R\to R$ και $h(g(f(x)))=e^{-2x}-4x-2$ για κάθε $x\in R$ τότε

i. να βρείτε την $h(x)$

ii. να αποδείξετε ότι η $h(x)$ αντιστρέφεται .

iii. να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{e}{e^{x^2}}-\dfrac{e}{e^{3x}}>2x^2-6x$

iv. να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x^2+1)}{e^{-x}+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h^{-1}(e)x^3+2x^2+3}{x^2+5x}$

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=lnx$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα θετική.

ΑΣΚΗΣΗ 56 (από Χρήστο Κανάβη)

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+lnf(x)-lnx-1=0$.

α. Να βρεθεί το $f(1)$

β. Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x}=f(1)$

ΑΣΚΗΣΗ 57 (από Alexandropoulos)

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)\geq 1$ για την οποία ισχύει $(f(x)-k)(f(y)+3k)=k$ για κάθε $x,y\epsilon R$ και $k\in R$.

α. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού k.

β. Για τη μικρότερη θετική ακέραια τιμή του k να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής.

ΑΣΚΗΣΗ 58 (από dennys)

Δίνεται συνάρτηση $f(x):R\to(0,+\infty)$ ώστε $f(x)f(y)=f(x+y)$ η οποία είναι συνεχής στο $x_o=0$ και $f(1)=e$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1, f(-1)=e^{-1}$

β. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο R.

γ. Αν είναι γνησίως μονότονη τότε:

i. Ποιά είναι η μονοτονία της ;

ii. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

δ. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_o\in(0,1)$ έτσι ώστε $3f(x_o)=f(2^{-1})+f(3^{-1})+f(4^{-1})$

ε. Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to0^+} f^{-1}(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(-1+x)}{f(x)}$

στ. Να δειχθεί ότι $f^{-1}(ab)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ για $a,b>0$

ζ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x^2)}{f^{-1}(x)}$

η. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o>0: f^{-1}(x_o)=x_o^{-1}$

θ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(f^{-1})(x)}{f^{-1}(x)}$

ΑΣΚΗΣΗ 59 (από Περικλή Παντούλα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 7x - 5$.

α. Να αποδείξετε ότι :

i. η f είναι $1-1$

ii. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$

β. Αν είναι $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-3}{x-1}, x \neq 1 \\ a^2 + 3a \ , x = 1 \end{cases}$, να βρείτε το $a \in R^*$, ώστε η $g(x)$ να είναι συνεχής στο $x_o = 1$

γ. i. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ii. Να δικαιολογήσετε το γεγονός ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in R$, ώστε να ισχύει $f(x_o) = 7$

iii. Να βρείτε ένα διάστημα της μορφής $(k, k+1)$, μέσα στο οποίο θα ανήκει αυτό το $x_o \in R$, όπου k ακέραιος

δ. Να βρείτε:

i. το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)\eta\mu x}{x^4}$

ii. τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε $f(\lambda^3 - 5\lambda) = f(2\lambda - 6)$

ΑΣΚΗΣΗ 60 (από Γιάννη Κουτσούκο)

Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f^2(0) + f^2(1) + 13 = 6f(0) + 4f(1)$.

α. Να αποδείξετε ότι :

i. Η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Υπάρχουν μοναδικά x_1 και x_2 στο διάστημα $(0,1)$ τέτοια ώστε :

α. η γραφική παράσταση της f τέμνει την $y = 3x$ σε σημείο με τετμημένη x_1.

β. $12f(x_2) = 3f(1/e) + 4f(1/\pi) + 5f(1/2)$

β. Να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(lnx + 4) - 1) > 3$

γ. Ορίζουμε τους μιγαδικούς $z = f(x) + if(x)$ με $x \in [0,1]$

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

ii. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-5|$.

ΑΣΚΗΣΗ 61 (από Χρήστο Τσιφάκη)

Να βρεθεί ο τύπος της g όταν $y > 0$ και $g(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{x}{e^{xy} + x^2 + 1}$

ΑΣΚΗΣΗ 62 (από Χρήστο Τσιφάκη)

Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[1,4]$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,4]$
- $f(1) > 0$
- $f(1)f(2) = f(3)f(4)$

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1,4]$,

β. η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - f(1)f(2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

Γ. η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη.

ΑΣΚΗΣΗ 63 (από Περικλή Παντούλα)

α. Να δειχθεί η ισοδυναμία $\lim_{x \to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \to 1} f(x_o h) = l$

β. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in R$.

Να δείξετε ότι :

i. αν η f είναι συνεχής στο $x_o = 1$, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

ii. αν η f είναι συνεχής στο $x_o = a$, όπου $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

iii. αν η f είναι συνεχής στο $x_o = 1$ και $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$, τότε $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{a}$,

όπου $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 64 (από Μίλτο Παπαγρηγοράκη)

Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y) = f(x) + f(y) - \alpha$, για κάθε $x, y \in R$, $\alpha \in R$ (σταθερό).

α. Να αποδείξετε ότι $f(0) = \alpha$

β. Να αποδείξετε ότι $f(x-y) = f(x) - f(y) + \alpha$ για κάθε $x, y \in R$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f(\nu x) = \nu f(x) - (\nu - 1)\alpha$ για κάθε $x \in R$, $\nu \in \mathrm{N}^*$.

δ. Αν η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική λύση στο R, να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και ισχύει $f^{-1}(x+y-\alpha) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in f(R)$

ε. Αν για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > \alpha$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο R και να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(2f(x^2)\right) < f^{-1}\left(f(3x-1) + \alpha\right)$.

στ. Αν η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$ να βρείτε το $\lim_{x \to \alpha} f(x)$

Πηγή: <u>περιοδικό Απολλώνιος</u>

ΑΣΚΗΣΗ 65 (από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+5f(x)+x=0$ για κάθε $x \in R$

α. Να προσδιορίσετε το πρόσημο της συνάρτησης f

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

γ. Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το R και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

δ. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

ε. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R

στ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x-19)=x+1$

ζ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)}{\eta\mu x}$

ΑΣΚΗΣΗ 66 (από ghan)

Έστω $f: R \to \mathrm{R}$ συνεχής, για την οποία ισχύει για κάθε $x \in R$: $x^2 < f(x) < x^2+1$.

α. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y=2x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

β. Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι:

i. η $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{e^x}-1,\ x \in R$ είναι γνησίως φθίνουσα

ii. η εξίσωση $e^x+f(x)=e^x f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,2)$.

γ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln x\right]$.

ΑΣΚΗΣΗ 67 (από Μίλτο Παπαγρηγοράκη)

Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:(0,1)\to R$ για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-5}{x}=3$ και $2\eta\mu(x-1) \le (x-1)f(x) \le x^2-1$ για κάθε $x \in (0,1)$.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=f(x)-\ln x-3, \quad x\in(0,1)$.

β. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=e^{f(x)-3}$ τέμνει τη διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων σε ένα μόνο σημείο, με τετμημένη $x_o \in (0,1)$

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\alpha+3}=e^{f(x)}$ στο διάστημα $(0,1)$, για κάθε $\alpha \in R$

ΑΣΚΗΣΗ 68 (από ghan)

Έστω $f: R \to R$ με $f(R) = R$ και επιπλέον για κάθε $x, y \in \mathrm{R}$ ισχύει $\left|f(x) - f(y)\right| \geq \frac{1}{\vartheta}|x-y|$, όπου $\vartheta \in (0,1)$. Να δειχθεί ότι:

α. η f αντιστρέφεται,

β. $\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right| \leq \vartheta|x-y|$ για κάθε $x, y \in R$,

γ. η $f^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο R,

δ. η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο R.

ΑΣΚΗΣΗ 69 (από Περικλή Παντούλα)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: R \to R$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2xf(x) + 2g(x)$, για κάθε $x \in R$.

α. Να δείξετε ότι $\left(f(x) - x\right)^2 + \left(g(x) - 1\right)^2 = x^2$, για κάθε $x \in R$.

β. Να δείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο $x_o = 0$

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

δ. Αν η g συνεχής στο R, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = -2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R

ΑΣΚΗΣΗ 70 (από Χρήστο Κανάβη)

Δίνεται η συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = ln\left(x^2 - x\right)$ και $g(x) = ln(x-1)$.

α. Να εξετάσετε αν το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης h της διαφοράς των f, g

β. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1}

γ. Να λυθεί η εξίσωση $h^{-1}(x-1) + h(x) = ln\left(h^{-1}(ln2)\right) + eh(e)$

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 09/01/2012 – 17/01/2012

Πηγή – Απαντήσεις

(*)http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=22127

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 09/01/2012 – 17/01/2012

Πρότειναν οι:

Γιάννης Σταματογιάννης
Γιάννης Κουτσούκος
Δημήτρης Κατσίποδας
Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μπάμπης Στεργίου
Περικλής Παντούλας
Χρήστος Κανάβης
Χρήστος Τσιφάκης
alexandropoulos
dennys
ghan
pito

Έλυσαν (*) οι:

Αλέξανδρος Συγκελάκης
Αναστάσης Κοτρώνης
Απόστολος Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Δημήτρης Ιωάννου
Δημήτρης Κατσίποδας
Δημήτρης Κρικώνης
Κώστας Καπένης
Κώστας Ρεκούμης
Λευτέρης Πρωτοπαπάς
Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μπάμπης Στεργίου
Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης
Περικλής Παντούλας
Ροδόλφος Μπόρης
Σπύρος Καπελλίδης
Χρήστος Κανάβης
Χρήστος Στραγάλης
Χρήστος Τσιφάκης
dennys
parmenides51
pito

Πηγή – Απαντήσεις
(*)http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=22127

Επιμέλεια: parmenides51