ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
ΜΕΣΟΙ ΟΡΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
ΤΟ ΜΕΣΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΔΙΑΙΡΕΤΩΝ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ

Πηγή: Tom Apostol - Εισαγωγή στην Αναλυτική Θεωρία των Αριθμών

- Ασυμπτωτική συμπεριφορά αριθμητικών συναρτήσεων
- Μέσοι όροι αριθμητικών συναρτήσεων
- Το μέσο μέγεθος της συνάρτησης διαιρετών $d(n)$

Στόχος του άρθρου αυτού είναι να καταδείξει έναν τρόπο μελέτης της συμπεριφοράς αριθμητικών συναρτήσεων (ακολουθιών) $f(n)$ για μεγάλες τιμές του n.

Ειδικότερα, ως εφαρμογή κάποιων γενικών αποτελεσμάτων που θα βρούμε θα μελετήσουμε την συνάρτηση $d(n)$ διαιρετών του n. Δηλαδή την συνάρτηση που σε κάθε φυσικό αριθμό n αντιστοιχεί το πλήθος των διαιρετών του $d(n)$. [π.χ. $d(3)=2$ $d(10)=4$]. Αυτή η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2 άπειρες φορές (όταν ο n είναι πρώτος) και ακόμη, παίρνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές, όταν ο n έχει μεγάλο πλήθος διαιρετών. [π.χ. αν $n=p^m$, p πρώτος, τότε $d(p^m)=m+1$, $m\in\mathbb{N}$] Έτσι οι τιμές της $d(n)$ κυμαίνονται αισθητά, καθώς ο n αυξάνει.

Πολλές αριθμητικές συναρτήσεις κυμαίνονται κατ' αυτό τον τρόπο και συχνά είναι δύσκολο να προσδιορισθεί η συμπεριφορά τους για μεγάλους n. Ορισμένες φορές, είναι αποδοτικότερο να μελετάται ο μέσος αριθμητικός $\tilde{f}(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Οι μέσοι όροι εξομαλύνουν τις διακυμάνσεις, οπότε είναι εύλογο να αναμένεται ότι οι μέσες τιμές $\tilde{f}(n)$, συμπεριφέρονται πιο κανονικά παρά οι $f(n)$. Αυτό, πράγματι, συμβαίνει για τη συνάρτηση $d(n)$, και όπως θα αποδείξουμε, ο μέσος αριθμητικός $\tilde{d}(n)$ αυξάνει όπως ο $\log n$ για μεγάλους n. Πιο συγκεκριμένα ισχύει $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\tilde{d}(n)}{\log n}=1$. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα περιγράφεται λέγοντας ότι: το μέσο μέγεθος της $d(n)$ είναι $\log n$.

Για την μελέτη του μέσου όρου της $f(n)$, απαιτείται γνώση των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Μερικές φορές είναι άνετο να αντικαθίσταται ο άνω δείκτης n από έναν αυθαίρετο πραγματικό αριθμό x και να θεωρούνται (αντί των μερικών αθροισμάτων), αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k\le x} f(k).$$

Εδώ εννοείται ότι ο δείκτης k μεταβάλλεται από 1 έως $[x]$ (ακέραιο μέρος του x).

Δηλ. $\sum_{k\le x} f(k) = \sum_{k=1}^{[x]} f(k)$.

Όταν $0<x<1$, το παραπάνω άθροισμα είναι "κενό" και του αποδίδουμε την τιμή 0.

Θα προσπαθήσουμε να καθορίσουμε την συμπεριφορά του αθροίσματος $\sum_{k\le x} f(k)$, όταν θεωρείται σαν συνάρτηση του x και ιδιαίτερα, όταν x είναι μεγάλος αριθμός.

Ορισμός: Αν $g(x)>0$ $\forall x\ge\alpha$ τότε ο συμβολισμός $f(x)=O(g(x))$ [διαβάστε «η $f(x)$ είναι κεφαλαίο όμικρον της $g(x)$»] σημαίνει ότι:

$$|f(x)| \le M g(x) \quad \forall x\ge\alpha,$$ όπου M κάποια σταθερά.

Παρατηρήσεις:

1. Μια εξίσωση της μορφής $f(x)=h(x)+O(g(x))$ σημαίνει ότι $f(x)-h(x)=O(g(x))$.
2. Αν $f(t)=O(g(t))$ $\forall t\ge\alpha$ τότε:
$$\int_\alpha^x f(t)\,dt = O\left(\int_\alpha^x g(t)\,dt\right) \quad \forall x\ge\alpha.$$

Ορισμός: Αν $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=1$ τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι ασυμπτωτικά ίση με την $g(x)$ και γράφουμε

$$f(x)\sim g(x) \text{ όταν } x\to\infty.$$

Μερικές φορές η ασυμπτωτική τιμή ενός μερικού αθροίσματος μπορεί να προκύψει με την σύγκρισή του με ένα ολοκλήρωμα. Ένας αθροιστικός τύπος που οφείλεται στον Euler, δίνει μια ακριβή έκφραση για το σφάλμα που παρουσιάζεται σε μια τέτοια προσέγγιση.

Θεώρημα (Αθροιστικός τύπος του Euler).
Αν η f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[y,x]$ όπου $0<y<x$ τότε:

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x (t-[t])f'(t)\,dt + f(x)([x]-x) - f(y)([y]-y). \quad (1)$$

απόδειξη

Έστω $m=[x]$, $k=[x]$. Αν $n, n-1$ ακέραιοι του $[y,x]$ τότε $\int_{n-1}^{n} [t]f'(t)\,dt = \int_{n-1}^{n} (n-1)f'(t)\,dt =$

$(n-1)\left[f(n)-f(n-1)\right] = nf(n) - (n-1)f(n-1) - f(n)$

Αθροίζοντας από $n=m+1$ έως $n=k$, έχουμε:

$$\int_m^k [t]f'(t)\,dt = \sum_{n=m+1}^{k}\left[nf(n)-(n-1)f(n-1)\right] - \sum_{n=m+1}^{k} f(n)$$

$$= kf(k) - mf(m) - \sum_{y<n\le x} f(n), \quad \text{άρα}$$

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = kf(k) - mf(m) - \int_m^k [t]f'(t)\,dt \quad (2)$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε: $\int_y^x f(t)\,dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x t f'(t)\,dt$ (3)

Από τις (2), (3) με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x (t-[t])f'(t)\,dt + f(x)([x]-x) - f(y)([y]-y).$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε κάποιους στοιχειώδεις ασυμπτωτικούς τύπους. Στις εκφράσεις που θα προκύψουν εμφανίζονται τα εξής σύμβολα:

i) Μια σταθερά C που λέγεται σταθερά του Euler και ορίζεται ως $C=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$

ii) Μια συνάρτηση $\zeta(s)$ που καλείται συνάρτηση ζήτα του Riemann και ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\ \text{για } s>1$$

$$\zeta(s)=\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}-\frac{x^{1-s}}{1-s}\right)\ \text{για } 0<s<1.$$

Θεώρημα: Αν $x\ge 1$ τότε:

(α) $\displaystyle\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\log x+C+O\left(\frac{1}{x}\right)$

(β) $\displaystyle\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}=\frac{x^{1-s}}{1-s}+\zeta(s)+O(x^{-s})$ αν $s>0$, $s\ne 1$.

(γ) $\displaystyle\sum_{n>x}\frac{1}{n^s}=O(x^{1-s})$ αν $s>1$

(δ) $\displaystyle\sum_{n\le x}n^{\alpha}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+O(x^{\alpha})$ αν $\alpha\ge 0$.

απόδειξη

(α) Έστω $f(t)=\frac{1}{t}$, τότε $f'(t)=-\frac{1}{t^2}$ $\forall t>0$. Εφαρμόζουμε τώρα τον αθροιστικό τύπο του Euler.

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\int_1^x\frac{1}{t}dt+\int_1^x(t-[t])\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt+f(x)([x]-x)+1$$

$$=\log x-\int_1^x\frac{t-[t]}{t^2}dt-\frac{x-[x]}{x}+1$$

$$=\log x-\int_1^{\infty}\frac{t-[t]}{t^2}dt+\int_x^{\infty}\frac{t-[t]}{t^2}+1-\frac{x-[x]}{x}$$

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα παραπάνω υπάρχουν διότι υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ και $\int_x^\infty \frac{dt}{t^2}$ και ισχύει $\frac{t-[t]}{t^2} < \frac{1}{t^2}$.

Επίσης $0 \leq \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{x}$

Θα είναι λοιπόν:

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Θέτουμε $C = 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt$ οπότε προκύπτει ότι $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)$. (Η σταθερή C είναι η σταθερή του Euler διότι $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} - \log x - C = O\left(\frac{1}{x}\right)$, οπότε όταν $x \to +\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} - \log x\right) = C$).

(B) Έστω $f(t) = \frac{1}{t^s}$ $s>0$, $s\neq 1$. Με εφαρμογή του τύπου Euler έχουμε:

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} = \int_1^x \frac{dt}{t^s} + \int_1^x \frac{t-[t]}{t^{s+1}}(-s)\,dt + 1 + \frac{1}{x^s}([x]-x) =$$

$$= -\frac{1}{1-s} + \frac{x^{1-s}}{1-s} - s\int_1^x \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt + 1 + \frac{[x]-x}{x^s} =$$

$$= -\frac{1}{1-s} + \frac{x^{1-s}}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt + s\int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt + 1 + \frac{[x]-x}{x^s}$$

$$= -\frac{1}{1-s} + \frac{x^{1-s}}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt - \left[\frac{1}{t^s}\right]_x^\infty + 1 + \frac{[x]-x}{x^s}$$

$$= -\frac{1}{1-s} + \frac{x^{1-s}}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt + 1 + O(x^{-s})$$

$$= \frac{x^{1-s}}{1-s} + C(s) + O(x^{-s})$$

Όπου $C(s) = 1 - \frac{1}{1-s} - s\int_1^{\infty} \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt$.

Έχουμε λοιπόν $\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} = C(s) + O(x^{-s})$

Αν $s>1$, όταν $x \to +\infty$ προκύπτει ότι $x^{1-s} \to 0$ άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = C(s) \Rightarrow \zeta(s) = C(s).$$

Όταν $0<s<1$, $\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s}\right) = C(s)$ δηλαδή

και πάλι $C(s) = \zeta(s)$.

Τελικά $\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})$.

(γ) $\sum_{n>x}\frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-s}) = O(x^{1-s})$

διότι είναι $s>1$ άρα $x^{-s} \le x^{1-s}$.

(δ). Έστω $f(t) = t^{\alpha}$. Έχουμε:

$$\sum_{n\le x} n^{\alpha} = \int_1^x t^{\alpha}\,dt + \int_1^x (t-[t])\,\alpha t^{\alpha-1}\,dt + x^{\alpha}([x]-x)$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} + \alpha\int_1^x (t-[t])\,t^{\alpha-1}\,dt + x^{\alpha}([x]-x)$$

Όμως $\int_1^x \alpha(t-[t])\,t^{\alpha-1}\,dt \le \int_1^x \alpha t^{\alpha-1}\,dt = \int_1^x (t^{\alpha})'\,dt = x^{\alpha}-1 < x^{\alpha}$

Άρα $\sum_{n\le x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha})$.

Ερχόμαστε τώρα στον υπολογισμό του μέσου μεγέθους της συνάρτησης διαιρετών $d(n)$.

Θεώρημα: Για κάθε $x \geq 1$ ισχύει:

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2C-1)x + O(\sqrt{x})$$

(όπου C η σταθερά του Euler).

απόδειξη.

Ισχύει $d(n) = \sum_{d|n} 1$. [Όπου $\sum_{d|n}$ δηλώνει ένα άθροισμα που εκτείνεται πάνω στους διαιρέτες του αριθμού n. π.χ. $\sum_{d|10} f(d) = f(1)+f(2)+f(5)+f(10)$].

Επομένως $\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1$.

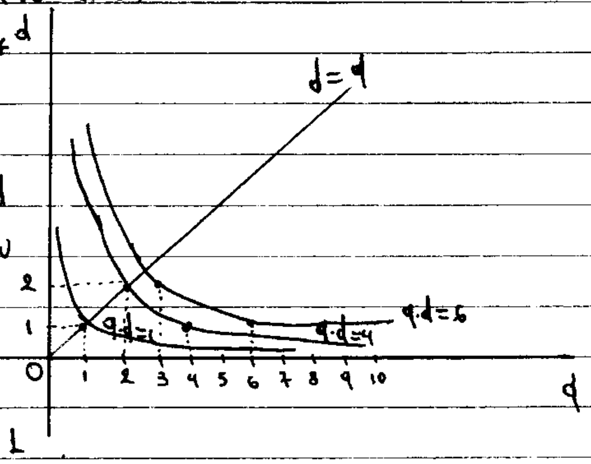
Αφού $d|n$, θα υπάρχει ακέραιος q ώστε $n = q \cdot d$. Έτσι το τελευταίο άθροισμα μπορούμε να πούμε ότι εκτείνεται πάνω σ' όλα τα ζεύγη ακεραίων q, d για τους οποίους $q \cdot d \leq x$ δηλαδή

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{\substack{q,d \\ q \cdot d \leq x}} 1$$

Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως άθροισμα που εκτείνεται, πάνω σε ορισμένα συνδεσμικά σημεία στο $q-d$ επίπεδο. (Συνδεσμικά λέγονται τα σημεία του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες ως προς κάποιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων).

Τα συνδεσμικά σημεία (q, d) με $q \cdot d = n$ βρίσκονται πάνω σε μια υπερβολή, οπότε το τελευταίο άθροισμα απαριθμεί το πλήθος των συνδεσμικών σημείων, που αντιστοιχού στις υπερβολές με $n=1,2,\dots,[x]$.

Για κάθε ένα συγκεκριμένο $d\le x$ μπορούμε, πρώτα, να απαριθμήσουμε εκείνα τα συνδεσμικά σημεία που βρίσκονται πάνω στο οριζόντιο ευθ. τμήμα $1\le q\le x/d$ και έπειτα να αθροίσουμε πάνω σ' όλα τα $d\le x$. Έτσι θα έχουμε:



$$\sum_{n\le x} d(n) = \sum_{\substack{q,d\\ q\cdot d\le x}} 1 = \sum_{d\le x}\sum_{q\le \frac{x}{d}} 1.$$

Κάνουμε χρήση του τύπου (δ) με $\alpha=0$ οπότε:

$$\sum_{n\le x} d(n) = \sum_{d\le x}\left(\frac{x}{d}+O(1)\right) = x\sum_{d\le x}\frac{1}{d} + O(x) =$$

$$= x\left[\log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)\right] + O(x) = x\log x + O(x).$$

Αυτή είναι μια ασθενής παραλλαγή του τύπου που θέλουμε να αποδείξουμε και δείχνει ότι

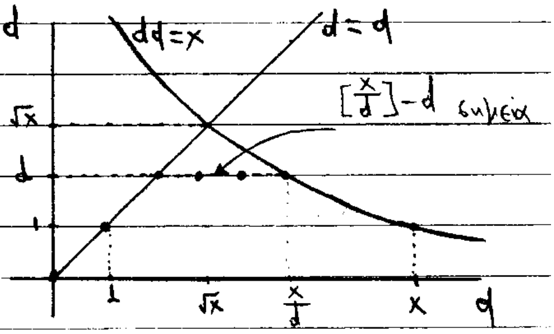
$$\sum_{n\le x} d(n) \sim x\log x \quad \text{όταν } x\to+\infty$$

ενώ δίνει τον $\log n$ ως το μέσο μέγεθος της $d(n)$.

Για να αποδείξουμε τον ακριβέστερο τύπο του θεωρήματος γυρίζουμε πίσω στο άθροισμα $\sum_{n\le x} d(n) = \sum_{\substack{q,d\\ d\cdot q\le x}} 1$.

Ο συνολικός αριθμός των συνδεσμικών σημείων του παραπάνω χωρίου (λόγω συμμετρίας) ισούται με το διπλάσιο αριθμό των συνδεσμικών σημείων που είναι κάτω από την ευθεία $d=q$, συν τον αριθμό των σημείων που βρίσκονται πάνω στην ευθεία $d=q$. (η ευθεία $d=q$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $q\hat{O}d$).

Θα έχουμε λοιπόν: (Βλέπε και στο διπλανό σχήμα)



$$\sum_{n\le x} d(n) = 2\sum_{d\le\sqrt{x}}\left\{\left[\frac{x}{d}\right]-d\right\} + [\sqrt{x}]$$

Άρα αφού $[y]=y+O(1)$ η παραπάνω σχέση δίνει:

$$\sum_{n\le x} d(n) = 2\sum_{d\le\sqrt{x}}\left\{\frac{x}{d}-d+O(1)\right\} + [\sqrt{x}] =$$

$$= 2x\sum_{d\le\sqrt{x}}\frac{1}{d} - 2\sum_{d\le\sqrt{x}} d + O(\sqrt{x})$$

$$= 2x\cdot\left\{\log\sqrt{x}+C+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\} - 2\left\{\frac{x}{2}+O(\sqrt{x})\right\}+O(\sqrt{x})$$

$$= x\log x + 2Cx + O(\sqrt{x}) - x + O(\sqrt{x})$$

$$= x\log x + (2C-1)x + O(\sqrt{x}). \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Παρατηρήσεις: 1. Τον παραπάνω τύπο τον απέδειξε ο Dirichlet το 1849.

2. Ο όρος σφάλματος $O(\sqrt{x})$ μπορεί να βελτιωθεί. Το 1903 ο Voronoi απέδειξε ότι το σφάλμα είναι $O(x^{\frac{1}{3}}\log x)$. Το 1922 ο van der Corput το βελτίωσε στο $O(x^{33/100})$. Το 1969 ο Kolesnik το υπολόγισε σε $O(x^{(12/37)+\varepsilon})$ για κάθε $\varepsilon>0$.

Ο προσδιορισμός όλων των θ, για τα οποία το σφάλμα είναι $O(x^{\theta})$ είναι άλυτο πρόβλημα, γνωστό ως πρόβλημα διαιρετών του Dirichlet. Το 1915 οι Hardy και Landau απέδειξαν ότι $\inf\theta \ge \frac{1}{4}$.

Βιβλιογραφία: 1. TOM M. APOSTOL "Εισαγωγή στην αναλυτική θεωρία των αριθμών".