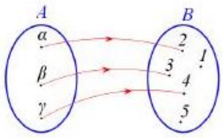
Φανταστείτε ότι μπαίνετε σε μια αίθουσα διδασκαλίας και βλέπετε ότι κάποιοι μαθητές είναι όρθιοι. Κοιτώντας προσεκτικά διαπιστώνετε ότι δεν υπάρχουν διαθέσιμες καρέκλες για να καθίσουν οι μαθητές. Προφανώς βγάζετε στη στιγμή το συμπέρασμα ότι οι καρέκλες είναι λιγότερες από τους μαθητές. Πάτε στην αποθήκη του σχολείου και γυρίζετε φέρνοντας μια στοίβα καρέκλες τις οποίες τοποθετείτε στην αίθουσα και καλείται τους όρθιους μαθητές να καθίσουν. Βλέπετε τώρα ότι αφού όλοι έχουν καθίσει, κάποιες καρέκλες περισσεύουν. Σκέφτεστε πως έχετε φέρει περισσότερες καρέκλες απ' όσες χρειάζονταν στην πραγματικότητα, και τώρα το πλήθος των καρεκλών είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των μαθητών. Απομακρύνετε λοιπόν τις παραπανίσιες καρέκλες από την αίθουσα. Τώρα πια είστε σίγουροι ότι αφού κάθε μαθητής κάθετε σε ένα κάθισμα, και δεν υπάρχουν ούτε όρθιοι μαθητές, ούτε πλεονάζουσες καρέκλες το πλήθος των μαθητών είναι ίσο με το πλήθος των καρεκλών, ακόμα κι αν δεν γνωρίζετε ποιο είναι το πλήθος αυτό.

Αυτή την απλή ιδέα πήρε ο George Cantor (Κάντορ), και θεώρησε ότι είναι η βάση για να μπορέσει κάποιος να συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων που έχουν δυο σύνολα, καταλήγοντας στον εξής ορισμό:

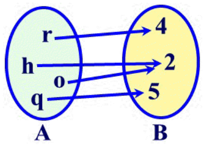
Έστω δυο σύνολα Α και Β. Θα λέμε ότι το σύνολο Α έχει τον **ίδιο πληθάριθμο** (πλήθος στοιχείων) με το σύνολο Β αν και μόνο αν υπάρχει μια **αμφιμονότιμη** συνάρτηση του Α **επί** του Β. (Bijection)

Ο όρος αμφιμονότιμη δηλώνει την ιδιότητα που στο σχολικό βιβλίο εκφράζουμε ως συνάρτηση «1-1».
Μια συνάρτηση καλείται συνάρτηση "**ένα προς ένα**" (Injection)
όταν σε διαφορετικά στοιχεία του Α αντιστοιχούν διαφορετικά στοιχεία του Β.
Δηλαδή f είναι 1-1 όταν για κάθε $\chi_1,\chi_2 \in A$,
$\chi_1 \neq \chi_2 \Leftrightarrow f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$ ή $f(\chi_1)=f(\chi_2) \Leftrightarrow \chi_1=\chi_2$

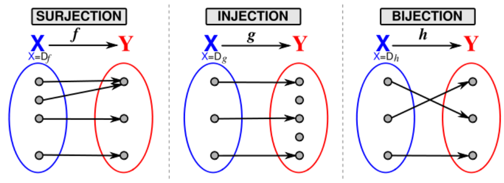


Σχήμα α΄

Η συνάρτηση f: A→ B λέγεται **επί (Surjection)** του συνόλου Β όταν για το σύνολο τιμών της ισχύει **f(A)=B**.



Σχήμα β΄



Στα παραπάνω διαγράμματα Venn η πρώτη συνάρτηση f:X-->Y είναι επί του συνόλου Y, η δεύτερη συνάρτηση g: X-->Y είναι «1-1» (αφιμονότιμη), ενώ η τρίτη είναι ταυτοχρόνως και αμφιμονότιμη και επί. Προφανώς σε αυτή την τελευταία περίπτωση όπως διαπιστώνουμε τα στοιχεία των δυο συνόλων είναι απολύτως ζευγαρωμένα και δεν περισσεύει κανένα στοιχείο από κάποιο σύνολο που να μην έχει ένα και μοναδικό «έτερον ήμισυ». Έτσι θα συμφωνούσαμε με τον Κάντορ ότι στην περίπτωση αυτή τα σύνολα X και Y έχουν τον **ίδιο πληθάριθμο**. (Το ίδιο πλήθος στοιχείων).

Συνεχίζοντας τον ορισμό του ο Κάντορ ορίζει ότι το σύνολο Α έχει **μικρότερο πληθάριθμο** από το σύνολο Β, όταν το Α έχει τον ίδιο πληθάριθμο με ένα υποσύνολο του Β, αλλά το Β δεν έχει τον ίδιο πληθάριθμο με κανένα υποσύνολο του Α.

Για παράδειγμα Αν Α={1,2,3,4,5} και Β={3,5,7,9,11,13,17} και Γ={3,5,7,9,11} τότε το Γ είναι ένα (γνήσιο) υποσύνολο του Β και το Α έχει τον ίδιο πληθάριθμο με το Γ. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο πληθάριθμος του Α είναι μικρότερος από τον πληθάριθμο του Β.

Θα μου πείτε καλά όλα αυτά, αλλά δεν είναι σχεδόν τετριμμένα, προφανή και τελείως συμβιβαστά με βασικές μας διαισθήσεις για τα σύνολα; Η απάντηση είναι ότι πράγματι αυτό συμβαίνει όταν τα εμπλεκόμενα σύνολα είναι πεπερασμένα. Τι γίνεται όμως όταν τα σύνολα που συγκρίνουμε είναι απειροσύνολα;

Θεωρούμε το σύνολο N={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,…} όλων των φυσικών αριθμών, και το υποσύνολό του A={0,2,4,6,8,…} που αποτελείται από όλους τους άρτιους (ζυγούς) αριθμούς. Ποιο από τα δυο σύνολα έχει τον μικρότερο πληθάριθμο; (Σταματήστε το διάβασμα και σκεφθείτε το λίγο). Ίσως σκεφτήκατε κάπως έτσι: Το σύνολο A είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του N. Όλα τα στοιχεία του A ανήκουν στο σύνολο N αλλά το N περιέχει επιπλέον και όλους τους μονούς αριθμούς οι οποίοι δεν ανήκουν στο A. Άρα ο πληθάριθμος του N είναι μεγαλύτερος από αυτόν του A. Σωστά; Αν κάνατε τις προηγούμενες σκέψεις τότε βγάλατε το συμπέρασμα ότι το N έχει μεγαλύτερο πληθάριθμο από το A, γιατί μια βασική διαίσθηση σας λέει ότι «το όλον έχει περισσότερα στοιχεία από ένα μέρος του» μια διαίσθηση πέρα για πέρα αληθινή για όλα τα πεπερασμένα σύνολα που γνωρίζετε. Ωστόσο λίγο νωρίτερα επίσης δεχτήκατε ότι ο ορισμός του Κάντορ για την ισότητα δυο πληθαρίθμων συλλαμβάνει επακριβώς την βασική μας αντίληψη για το πότε δυο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Σύμφωνα με τον ορισμό του Κάντορ δυο σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο όταν υπάρχει ορισμένη μεταξύ τους μια συνάρτηση που είναι «1-1» και επί. Μπορεί ο ορισμός αυτός να μας οδηγεί σε διαφορετική εκτίμηση για την σύγκριση των πληθαρίθμων των συνόλων N και A;

Θεωρήστε τη συνάρτηση f:N-->A η οποία ορίζεται με τον απλό τύπο f(x)=2x για κάθε φυσικό αριθμό χ . Αυτή η συνάρτηση είναι «1-1» αφού αν $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $2x_1=2x_2$ επομένως $x_1=x_2$. Επίσης η f είναι και επί του A, αφού αν α είναι ένας άρτιος φυσικός αριθμό, τότε α=2κ για κάποιον φυσικό αριθμό κ, δηλαδή f(κ)=α. Άρα τα στοιχεία των συνόλων N και A μπορούν να ζευγαρωθούν μεταξύ τους μέσω της συνάρτησης f, με έναν και μοναδικό τρόπο δίχως να μείνει κάποιο στοιχείο χωρίς το ζευγάρι του. Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό του Κάντορ τα σύνολα N και A έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων! Με άλλα λόγια οι βασικές διαισθήσεις που έχουμε για τα πεπερασμένα σύνολα, δεν αληθεύουν για τα απειροσύνολα!

Τα αστέρια μου, οι μαθητές της Γ΄τάξης, μπορούν άνετα να αποδείξουν ότι η συνάρτηση f: (0,1)-->R με τύπο $f(x)=\frac{1-2x}{x(1-x)}$ είναι «1-1» και επί. Κατά κανόνα μετά την απόδειξη του προηγούμενου ισχυρισμού, στο ερώτημα ποιο σύνολο από τα δυο, το διάστημα (0,1) ή το σύνολο R όλων των πραγματικών αριθμών έχει περισσότερα στοιχεία, η απάντηση που παίρνω είναι ότι το σύνολο R έχει περισσότερα στοιχεία, αφού το (0,1) είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του R. Τι έχουμε όμως να πούμε τώρα υπό το πρίσμα του ορισμού του Κάντορ; Αφού η f είναι «1-1» και επί, τα σύνολα (0,1) και R έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων! Απίστευτο; Με γεωμετρικούς όρους είναι σαν να λέμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος 1, έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με ολόκληρη την ευθεία που έχει άπειρο μήκος!

Για σταθείτε όμως λίγο! Αφού το σύνολο (0,1) έχει άπειρα στοιχεία, και το σύνολο R έχει άπειρα στοιχεία δεν είναι λογικό να έχουν και τα δυο το ίδιο άπειρο πλήθος στοιχείων; Το ίδιο και το σύνολο A των άρτιων αριθμών και το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών που έχουν επίσης το καθένα άπειρα στοιχεία, θα έχουν μεταξύ τους το ίδιο άπειρο πλήθος στοιχείων. Σκεπτόμενοι έτσι, όλα τα απειροσύνολα θα πρέπει να έχουν τον ίδιο πληθάριθμο αφού όλα είναι απειροσύνολα. Έτσι το σύνολο N των φυσικών αριθμών και το διάστημα (0,1) θα πρέπει να έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Δυστυχώς, ο Κάντορ έδειξε ότι για άλλη μια φορά το άπειρο δεν συμβιβάζεται με κάποιες πεποιθήσεις μας που τις θεωρούμε αδιαμφισβήτητες. Συγκεκριμένα απέδειξε ότι δεν υπάρχει μόνο ένα «είδος» απείρου, αλλά μια διαβάθμιση απείρων που ξεκινάει με το πιο μικρό άπειρο που είναι αυτό των φυσικών αριθμών, και συνεχίζει ανοδικά χωρίς σταματημό. Στο άρθρο αυτό θα δώσουμε την απόδειξη του γεγονότος ότι ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι αυστηρά μικρότερος από τον πληθάριθμο των πραγματικών αριθμών του διαστήματος (0,1). Αυτή η απόδειξη είναι μορφή μιας μεθόδου που σήμερα ονομάζεται **«διαγώνιο επιχείρημα Κάντορ»**.

Θεώρημα Cantor.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών του διαστήματος (0,1) έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο από τον πληθάριθμο του συνόλου Ν των φυσικών αριθμών.

απόδειξη

Το σύνολο Α= $\left\{\frac{1}{\nu+1} : \nu \in N\right\} \subset (0,1)$ άρα ο πληθάριθμος του Α θα είναι μικρότερος ή ίσος από τον πληθάριθμο του (0,1). Θα υποθέσουμε ότι τα σύνολα Ν και (0,1) έχουν ίσους πληθαρίθμους και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού λοιπόν υποθέτουμε ότι το Ν και το (0,1) έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, θα υπάρχει μεταξύ τους ορισμένη μια συνάρτηση f: Ν→(0,1) που θα είναι ένα προς ένα και επί. Ας συμβολίσουμε για απλότητα την τιμή f(ν) της f στο φυσικό αριθμό ν με f_ν. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία των αριθμών $f_1,f_2,f_3,\ldots$ καλύπτει όλο το διάστημα (0,1), με άλλα λόγια κάθε αριθμός χ του διαστήματος (0,1) ισούται με την τιμή χ=fκ για κάποιον φυσικό αριθμό κ.

Ξέρουμε ότι κάθε αριθμός του (0,1) έχει μια μοναδική δεκαδική αναπαράσταση εκτός από τους αριθμούς της μορφής $\frac{\mu}{10^\kappa}$ που έχουν δυο δεκαδικά αναπτύγματα. Ένα με άπειρα μηδενικά και ένα με άπειρα εννιάρια. Για παράδειγμα $\frac{7}{1000}$=0,007000… ή $\frac{7}{1000}$=0,0069999…. Αν συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε μόνο αναπτύγματα με άπειρα εννιάρια τότε μπορούμε να πούμε ότι σε κάθε αριθμό του (0,1) αντιστοιχεί ένα μοναδικό δεκαδικό ανάπτυγμα. Έτσι μπορούμε να γράψουμε τα παρακάτω:

$f_1=0,f_{11}f_{12}f_{13}\ldots f_{1n}\ldots$

$f_2=0,f_{21}f_{22}f_{23}\ldots f_{2n}\ldots$

$f_3=0,f_{31}f_{32}f_{33}\ldots f_{3n}\ldots$

…………………………

$f_n=0,f_{n1}f_{n2}f_{n3}\ldots f_{nn}\ldots$

Θεωρούμε τον αριθμό $\delta=0,\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\nu\ldots$ όπου τα ψηφία δ_i επιλέγονται έτσι ώστε $\delta_i=4$ αν $f_{ii}\neq 4$ και $\delta_i=5$ αν $f_{ii}=4$. Τότε ο αριθμός δ ανήκει στο διάστημα (0,1) όμως δεν μπορεί να ταυτίζεται με κανέναν από τους αριθμούς $f_1,f_2,f_3,\ldots$αφού διαφέρει από καθένα τους στο i-στο δεκαδικό ψηφίο. Επίσης ο δ δεν έχει την μορφή $\frac{\mu}{10^\kappa}$. Έτσι ο δ είναι αριθμός του (0,1) που δεν ταυτίζεται με κανέναν από τους $f_1,f_2,f_3,\ldots$ γεγονός που αντιφάσκει με την αρχική μας υπόθεση.

Άρα ο πληθάριθμος του (0,1) είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο του Ν.

Τον πληθάριθμο του διαστήματος (0,1) άρα και του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, τον ονομάζουμε «**δύναμη του συνεχούς**». Το ερώτημα του αν υπάρχουν πληθάριθμοι ανάμεσα στον πληθάριθμο του Ν και αυτόν του συνεχούς, έχει μείνει στην ιστορία των Μαθηματικών, ως το **πρόβλημα του συνεχούς**.

Ο Κάντορ ολοκλήρωσε τις αποδείξεις του μέσα στο χρονικό διάστημα από το 1874 μέχρι το 1897. Αυτό που «ανακάλυψε» τον άφησε τόσο εμβρόντητο ώστε να γράψει σ’ ένα φίλο του «το βλέπω με τα μάτια μου και δεν το πιστεύω!» Η πολεμική που δέχτηκε το έργο του Cantor ήταν οξεία. Ο ίδιος προς το τέλος της ζωής του, έπασχε περιοδικά από διανοητικές κρίσεις και νευρώσεις. Για πολλούς θεωρήθηκε ότι αυτό ήταν το αντίτιμο που πλήρωνε ο ανθρώπινος νους εισβάλλοντας για πρώτη φορά στο επικίνδυνο βασίλειο του άπειρου και της ολότητας. Ένας από τους μεγάλους υποστηρικτές της θεωρίας του Cantor, υπήρξε και ο ξακουστός μαθηματικός David Hilbert, ο οποίος υπερασπιζόμενος το έργο του Κάντορ γράφει «κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor για μας».

Πηγές

1. Cantor Georg-Συμβολές στη θεμελίωση της θεωρίας των υπερπεπερασμένων αριθμών.
2. Π. Ξενικάκης - Πραγματική Ανάλυση
3. Κ. Κάλφα - Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων