Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX'S

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος [α,β] είναι ετερόσημες, τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιος ώστε f(ξ)=0. Η συνέχεια της f είναι ουσιαστική προϋπόθεση για την εξαγωγή του παραπάνω συμπεράσματος. Για παράδειγμα η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x \text{ αν } \chi<0 \\ 1 \text{ αν } \chi=0 \\ \chi \text{ αν } \chi>0 \end{cases}$ έχει ετερόσημες τιμές στα άκρα του διαστήματος [-2,2] όμως προφανώς δεν έχει ρίζες στο αντίστοιχο διάστημα (-2,2).

Στο άρθρο αυτό θα δούμε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος είναι ετερόσημες τότε η παράγωγος έχει πάντα μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) ακόμα και <u>δίχως την απαίτηση η f΄να είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β].</u>

<u>Θεώρημα 1</u>. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο [α,β] και f΄(α)f΄(β)<0 . Τότε υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε f΄(ξ)=0.

Απόδειξη

Δίχως βλάβη της γενικότητας έστω f΄(α)>0 και f΄(β)<0. Έχουμε $lim_{\chi\to\alpha}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0$ άρα υπάρχει $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε για κάθε χ∈(α,α+δ_1) να ισχύει f(χ)>f(α). Επομένως η f δεν έχει μέγιστο στο χ=α. Επίσης αφού $lim_{\chi\to\beta}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}=f'(\beta)<0$, θα υπάρχει $\delta_2>0$ ώστε για κάθε χ∈(β-δ_2,β) να έχουμε f(χ)>f(β) δηλαδή η f δεν παρουσιάζει μέγιστο ούτε στο β. Δεδομένου όμως ότι η f είναι συνεχής στο [α,β] θα έχει σίγουρα μέγιστο

στο διάστημα αυτό. Αφού λοιπόν το μέγιστο δεν το παίρνει στα άκρα του διαστήματος θα το παίρνει σε σημείο ξ εσωτερικό του [α,β]. Απο το θεώρημα Fermat τότε προκύπτει ότι f'(ξ)=0.

<u>Θεώρημα (Darboux's).</u> Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο [α,β] και f΄(α)≠f΄(β). Αν η είναι αριθμός ανάμεσα στις τιμές f΄(α),f΄(β) τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας ξ∈(α,β) τέτοιος ώστε f΄(ξ)=η.

Απόδειξη

Δίχως βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι f΄(α)<η<f΄(β).

Η συνάρτηση h(χ)=f(χ)-ηχ είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] με h΄(χ)=f΄(χ)-η και h΄(α)=f΄(α)-η<0, h΄(α)=f΄(β)-η>0. Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα 1, θα υπάρχει ξ∈(α,β) : h΄(ξ)=0 και συνεπώς f΄(ξ)=η.

Πόρισμα: Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει f΄(χ)≠0 για κάθε χ∈Δ τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Απόδειξη

Αν η f μπορούσε να πάρει και θετικές και αρνητικές τιμές στο διάστημα Δ τότε σύμφωνα με το θεώρημα 1 θα υπήρχε ξ∈Δ τέτοιο ώστε f΄(ξ)=0 άτοπο. Άρα είτε η f παίρνει μόνο θετικές τιμές οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, είτε παίρνει μόνο αρνητικές τιμές οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.