ΓΙΑΤΙ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{C}$ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΟΡΙΣΤΕΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

Γιώργος Κασαπίδης

Στο άρθρο αυτό θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών δεν είναι διατεταγμένο σώμα.

Ορισμός 1: **Σώμα** ονομάζουμε μια αλγεβρική δομή η οποία αποτελείται απο ένα σύνολο Σ εφοδιασμένο με δυο εσωτερικές πράξεις + και · για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1) α+β=β+α **5)** αβ=βα (αντιμεταθετική ιδιότητα)

2) α+(β+γ)=(α+β)+γ **6)** α(βγ)=(αβ)γ (προσεταιριστική ιδιότητα)

3) α+0=0+α=α **7)** α·1=1·α=α (ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου)

4) α+(-α)=0 **8)** α· $\frac{1}{\alpha}=1 \; για \; \alpha \neq 0$ (ύπαρξη αντίθετου και αντίστροφου)

9) α(β+γ)=αβ+αγ (επιμεριστική ιδιότητα)

Τι σημαίνει όμως ότι ένα σώμα είναι διατεταγμένο;

ορισμός 2: Ένα σώμα Σ λέμε οτι είναι διατετεταγμένο αν και μόνο αν υπάρχει ένα υποσύνολο $\Theta \subset \Sigma$ και ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

1) Το Θ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις +,· του Σ. Δηλαδή

$Για \; κάθε \; \alpha.\beta \in \Theta \Rightarrow \alpha+\beta \in \Theta \; και \; \alpha \cdot \beta \in \Theta$

2)

$για \; κάθε \; \alpha \in \Sigma \; ισχύει \; ακριβώς \; μια \; απο \; τις \; σχέσεις : \alpha \in \Theta \; ή - \alpha \in \Theta \; ή \; \alpha = 0$

Θεώρημα 1: Σ' ένα διατεταγμένο σώμα Σ ισχύει:

1) Αν $\alpha \in \Sigma \; και \; \alpha \neq 0 \; τότε \; \alpha^2 \in \Theta$

2) $1 \in \Theta$

απόδειξη

1) Αφού το Σ είναι διατεταγμένο σώμα και $\alpha \neq 0$ θα ισχύει $\alpha \in \Theta \; ή - \alpha \in \Theta$

Αν $\alpha \in \Theta \; τότε \; \alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \in \Theta$

Αν $-\alpha \in \Theta \; τότε \; (-\alpha) \cdot (-\alpha) \in \Theta. \; Άρα \; \alpha^2 \in \Theta.$

2) Αφού το Σ είναι σώμα θα έχουμε $1 \neq 0$. Τότε όμως σύμφωνα με την (1) $1^2 \in \Theta \; δηλαδή \; 1 \in \Theta.$

Θεώρημα 2: Το σώμα ($\mathbb{C},+,.$) των μιγαδικών αριθμών δεν είναι διατεταγμένο σώμα.

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε ότι το $\mathbb{C}$ είναι διατεταγμένο , θα πρέπει να υπάρχει ένα υποσύνολό του Θ για το οποίο θα ισχύουν τα αξιώματα (1) και (2) του ορισμού 2.

Αφού $i=(0,1)\,και\,0=(0,0)\,έπεται\,οτι\,i\neq 0.\,Άρα\,i^2\in\Theta\,δηλ.-1\in\Theta$

Όμως $1\in\Theta\,άρα-1\notin\Theta$ κι έτσι καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς το σώμα των μιγαδικών αριθμών δεν μπορεί να είναι διατεταγμένο.

Παρατήρηση: Στον ορισμό του διατεταγμένου σώματος ,το Σ μπορεί να αντικατασταθεί με έναν μεταθετικό δακτύλιο Δ με μοναδιαίο στοιχείο, οπότε αποκτούμε την έννοια του διατεταγμένου δακτυλίου. Το θεώρημα 1 εξακολουθεί να ισχύει.

Θεώρημα 3. Έστω δακτύλιος Δ εφοδιασμένος με μια σχέση διάταξης > για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες:

1) η σχέση > είναι μεταβατική

2) Για όλα τα στοιχεία α,β του Δ ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω: α>β ή α=β ή β>α

3) Αν α>β τότε α+γ>β+γ για κάθε γ που ανήκει στο Δ

4) Αν α>β τότε γα>γβ για κάθε γ που ανήκει στο Δ με γ>0

Τότε ο δακτύλιος Δ είναι διατεταγμένος.

Απόδειξη

Θέτουμε Θ= { $\alpha\in\Delta/\alpha>0$ }

Είναι πολύ εύκολο να αποδείξουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες 1,2 του ορισμού 2.