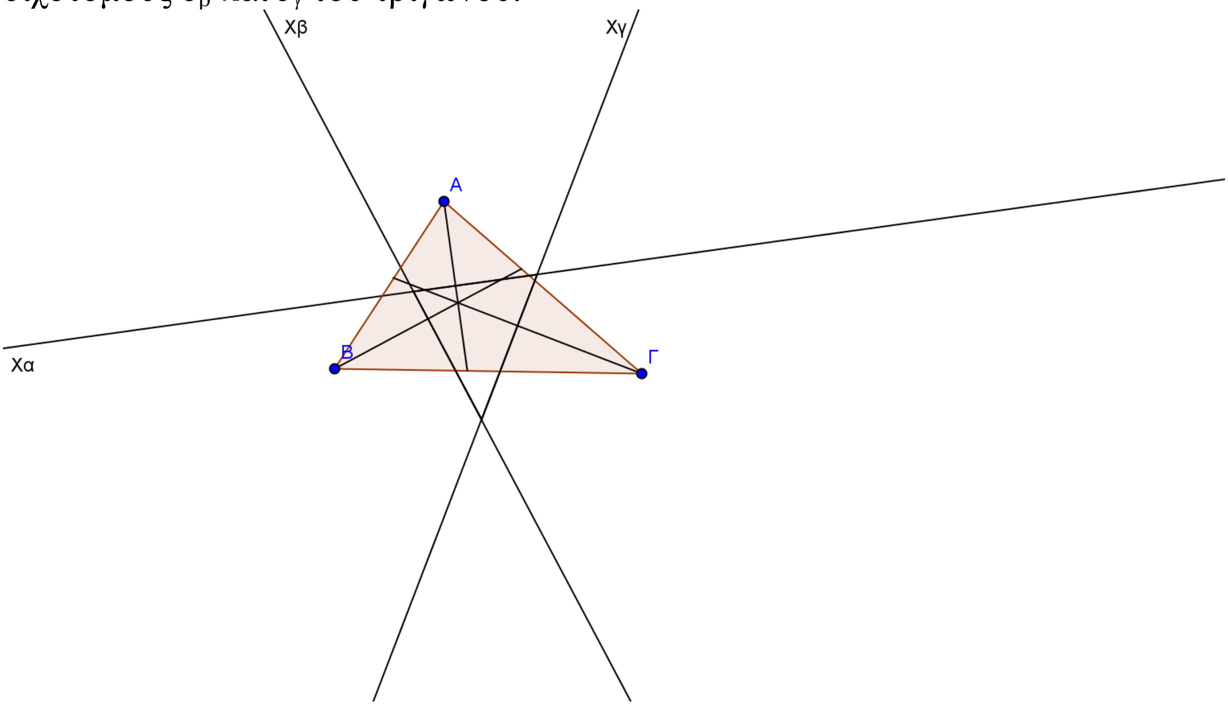
Κασαπίδης Γεώργιος

Στην παρούσα εργασία μελετούμε κάποιες ιδιότητες που έχει η μεσοκάθετος πάνω στην διχοτόμο ενός τριγώνου. Γι' αυτήν την ευθεία θα χρησιμοποιήσουμε τον δόκιμο όρο **διχοκάθετος**. Τέλος θα δούμε μια αξιοσημείωτη σύνδεση της διχοκαθέτου με την συμμετροδιάμεσο του τριγώνου.

Ορισμός:

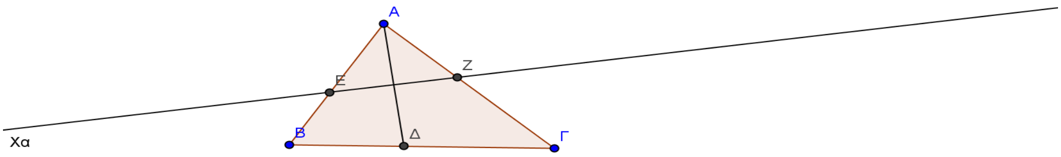
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ Την μεσοκάθετο της διχοτόμου δ_α θα την ονομάζουμε **διχοκάθετο** του τριγώνου και θα την συμβολίζουμε χ_α.
Παρόμοια ορίζονται και οι διχοκάθετοι χ_β και χ_γ που αντιστοιχούν στις διχοτόμους δ_β και δ_γ του τριγώνου.



Σχ.1

Πρόταση 1 Έστω ΑΔ η διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ. Αν η διχοκάθετος της ΑΔ τέμνει τις πλευρές ΑΒ , ΑΓ του τριγώνου στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδειχτεί ότι $\frac{AE}{AB}+\frac{AZ}{A\Gamma}=1$. Να εκφραστεί επίσης το ΑΕ συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου.

Απόδειξη



Σχ.2

Το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ρόμβος γιατί οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα και η ΑΔ διχοτομεί την γωνία Α.

Άρα ΑΕ//ΔΖ , ΕΔ//ΑΖ και ΑΕ=ΕΔ=ΔΖ=ΖΑ

Αφού ΔΖ//ΑΒ απο το θεώρημα του Θαλή έχουμε: $\frac{ΑΖ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΒΓ}$ (1) επίσης ΕΔ//ΑΓ επομένως $\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{ΔΓ}{ΒΓ}$ (2). Απο τις (1),(2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει : $\frac{ΑΖ}{ΑΓ}+\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{ΒΔ+ΔΓ}{ΒΓ}=\frac{ΒΓ}{ΒΓ}=1$.

Τώρα εφόσον ΑΖ=ΑΕ απο την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

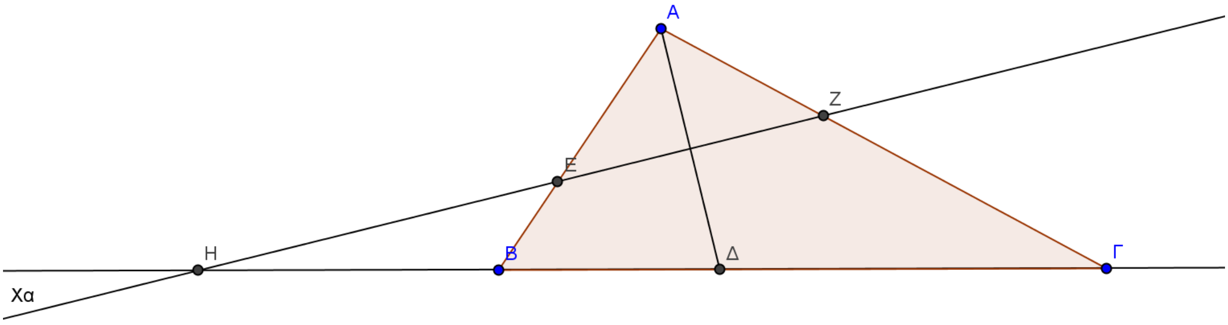
$ΑΕ(\frac{1}{ΑΒ}+\frac{1}{ΑΓ})=1$ οπότε $ΑΕ=\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{ΑΒ+ΑΓ}\Leftrightarrow ΑΕ=\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$.

<u>Πρόταση 2</u> Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}>\hat{Γ}$. Η διχοκάθετος χ_α τέμνει την ΒΓ στο Η. Να αποδειχτεί οτι:

α) $ΗΑ=\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta^2-\gamma^2}$ β) $ΗΒ=\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2-\gamma^2}$ γ) $ΗΓ=\frac{\alpha\beta^2}{\beta^2-\gamma^2}$ δ) $ΗΑ^2=ΗΒ\cdot ΗΓ$

ε) η ΗΑ εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ στο Α.

<u>Απόδειξη</u>



Σχ.3

Ισχύει ΑΗ=ΗΔ, επομένως $\widehat{HA\Delta}=\widehat{\mathrm{H\Delta A}}\Rightarrow \widehat{\mathrm{HAB}}+\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\Rightarrow \widehat{\mathrm{HAB}}=\hat{\Gamma}$

Για τα τρίγωνα ΑΗΒ,ΑΒΓ έχουμε: $\frac{(\mathrm{AHB})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{HB}\cdot\mathrm{BA}}{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{B\Gamma}}$ διότι $\widehat{\mathrm{HBA}}+\widehat{\mathrm{AB\Gamma}}=180^0$

$\frac{(\mathrm{AHB})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{HA}\cdot\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{A\Gamma}}$ διότι $\widehat{\mathrm{HBA}}=\hat{\Gamma}$

Άρα $\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{HA}\cdot\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow \mathrm{HB}=\mathrm{HA}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{HA}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\gamma}{\beta}$ επομένως

$$\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{B\Delta}}=\frac{\gamma}{\beta-\gamma}\Leftrightarrow \mathrm{HB}=\frac{\mathrm{B\Delta}\cdot\gamma}{\beta-\gamma}\Leftrightarrow \mathrm{HB}=\frac{\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}\cdot\gamma}{\beta-\gamma}\Leftrightarrow \mathrm{HB}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta^2-\gamma^2}$$

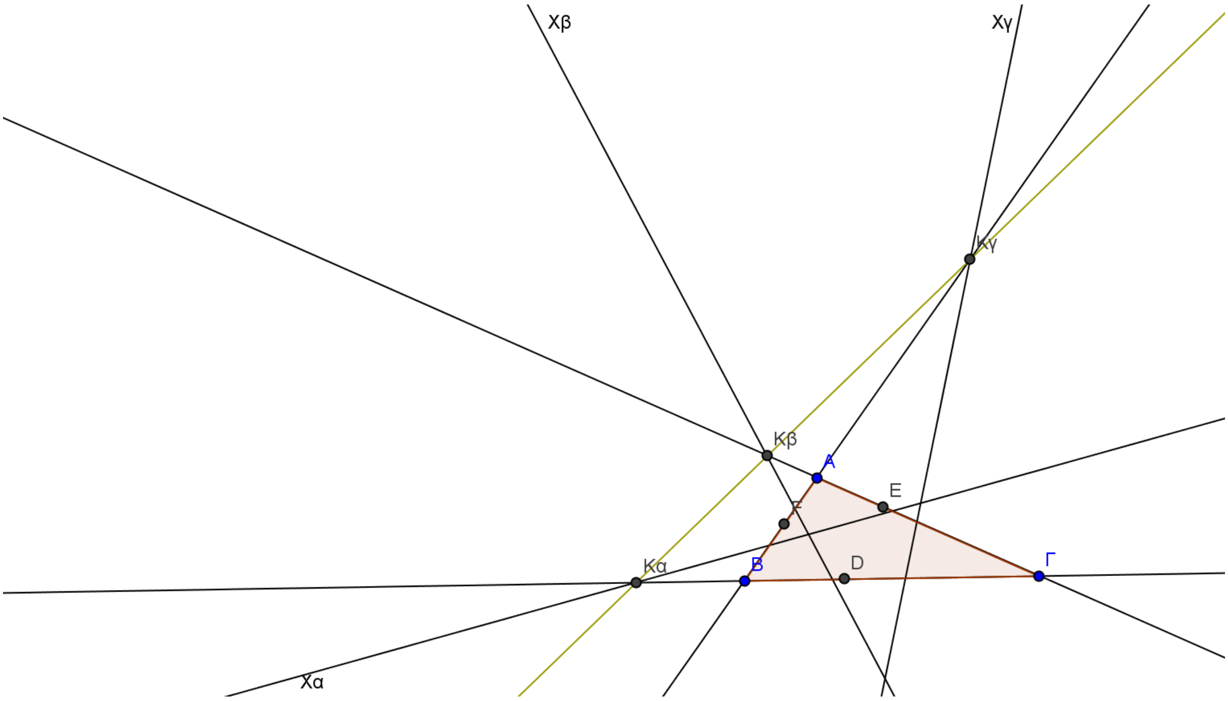
$$\mathrm{HA}=\mathrm{H\Delta}=\mathrm{HB}+\mathrm{B\Delta}=\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2-\gamma^2}+\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta^2-\gamma^2}$$

$$\mathrm{H\Gamma}=\mathrm{HB}+\mathrm{B\Gamma}=\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2-\gamma^2}+\alpha=\frac{\alpha\beta^2}{\beta^2-\gamma^2}$$

Είναι $\mathrm{HB}\cdot\mathrm{H\Gamma}=\frac{\alpha\beta^2\alpha\gamma^2}{(\beta^2-\gamma^2)^2}=\frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{(\beta^2-\gamma^2)^2}=\mathrm{HA}^2$ (Δηλ. το ΗΑ είναι ο γεωμετρικός μέσος των ΗΒ,ΗΓ). Λόγω της συνθήκης $\mathrm{HA}^2=\mathrm{HB}\cdot\mathrm{H\Gamma}$ από γνωστό θεώρημα προκύπτει ότι η ΗΑ εφάπτεται στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Α.

<u>Θεώρημα 1</u> Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > \hat{B} > \hat{\Gamma}$. Οι διχοκάθετοι χ_α, χ_β, χ_γ τέμνουν τις πλευρές α , β, γ σε σημεία συνευθειακά.

<u>Απόδειξη</u>



Σχ.4

Ας είναι K_α,K_β,K_γ τα σημεία τομής των χ_α,χ_β,χ_γ με τις α,β,γ αντίστοιχα. Σύμφωνα με την πρόταση 2 έχουμε:

$$K_\alpha A = \frac{\alpha\beta\gamma}{\beta^2-\gamma^2}, \quad K_\alpha B = \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2-\gamma^2}, \quad K_\alpha \Gamma = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2-\gamma^2}$$

$$K_\beta A = \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}, \quad K_\beta B = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^2-\gamma^2}, \quad K_\beta \Gamma = \frac{\beta\alpha^2}{\alpha^2-\gamma^2}$$

$$K_\gamma A = \frac{\gamma\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}, \quad K_\gamma B = \frac{\gamma\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}, \quad K_\gamma \Gamma = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^2-\beta^2}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $\frac{\overline{BK_\alpha}}{\overline{K_\alpha \Gamma}} \cdot \frac{\overline{\Gamma K_\beta}}{\overline{K_\beta A}} \cdot \frac{\overline{AK_\gamma}}{\overline{K_\gamma B}} = \frac{-\alpha\gamma^2}{\alpha\beta^2} \cdot \frac{-\beta\alpha^2}{\beta\gamma^2} \cdot \frac{-\gamma\beta^2}{\gamma\alpha^2} = -1$ άρα σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος Μενελάου , τα K_α , K_β , K_γ είναι συνευθειακά.

<u>Παρατήρηση:</u> Αν Α΄,Β΄,Γ΄ είναι τα σημεία τομής των εφαπτομένων του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου στα Β,Γ,Α τότε κατά το θεώρημα Desarques οι AA_1,BB_1,$\Gamma\Gamma_1$ συντρέχουν.

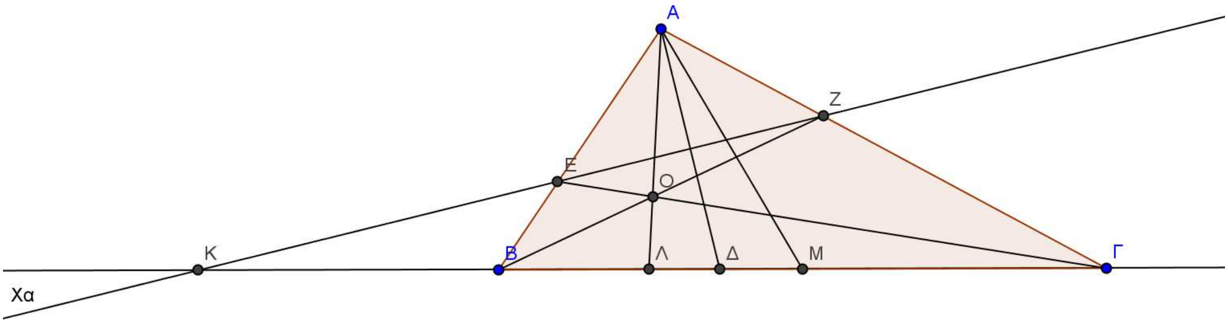
Θεώρημα 2 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Η διχοκάθετος χ_α τέμνει τις ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ στα σημεία Ε,Κ,Ζ αντίστοιχα. Αν Ο είναι η τομή των ΒΖ, ΕΓ και Λ η τομή της ΑΟ με την ΒΓ, τότε:

α) τα σημεία Κ,Λ είναι συζυγή αρμονικά των Β,Γ

β) η ΑΛ είναι η εσωτερική συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) η ΚΑ είναι η εξωτερική συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

Απόδειξη



Σχ.5

α) Από την πρόταση 2 έχουμε: $\frac{KB}{K\Gamma}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}$ (1) ενώ από την πρόταση 1 έχουμε:

$$AE = AZ = \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} \ (2) \ \text{ και } \ \Gamma Z = \frac{\beta^2}{\beta+\gamma} \ , \ BE = \frac{\gamma^2}{\beta+\gamma}$$

Οι ΒΖ,ΕΓ,ΑΓ συντρέχουν στο Ο , οπότε από το θεώρημα Ceva παίρνουμε:

$$\frac{\Lambda B}{\Lambda\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}\cdot\frac{EA}{EB}=1 \Rightarrow \frac{\Lambda B}{\Lambda\Gamma}=\frac{EB}{Z\Gamma} \Rightarrow \frac{\Lambda B}{\Lambda\Gamma}=\frac{\gamma^2}{\beta^2} \ (3)$$

Από τις (1),(3) προκύπτει ότι $\frac{KB}{K\Gamma}=\frac{\Lambda B}{\Lambda\Gamma}$ δηλαδή τα Κ,Λ είναι συζυγή αρμονικά των Β,Γ.

β) Συμμετροδιάμεσος (εσωτερική) λέγεται το συμμετρικό της διαμέσου ως προς την διχοτόμο της αντίστοιχης γωνίας του τριγώνου. Κάθε σημείο της συμμετροδιαμέσου απέχει από τις πλευρές του τριγώνου , αποστάσεις ανάλογες προς αυτές. Αν Α΄ είναι η τομή της συμμετροδιαμέσου που αντιστοιχεί στο Α με την ΒΓ, τότε είναι γνωστό ότι $\frac{A'B}{A'\Gamma}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}$ (4)

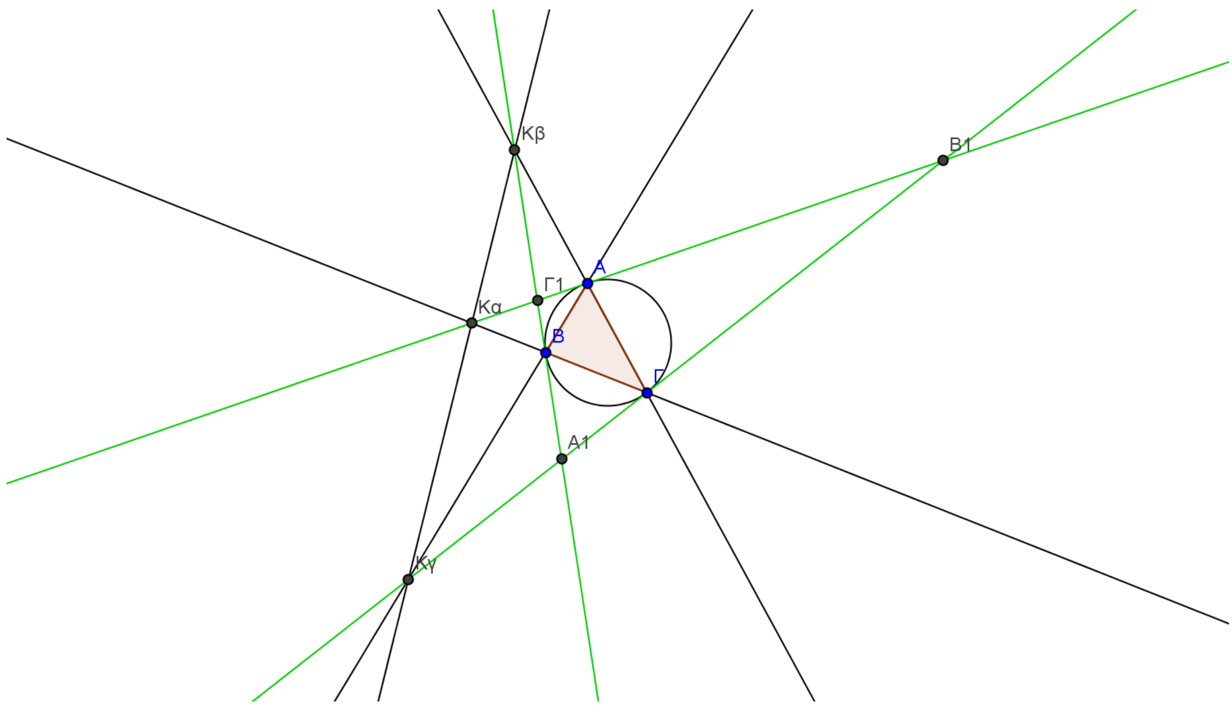
Από τις (3),(4) προκύπτει ότι $\frac{A'B}{A'\Gamma}=\frac{\Lambda B}{\Lambda\Gamma}$ οπότε λόγω της μοναδικότητας του σημείου της εσωτερικής διαίρεσης ενός τμήματος σε δοσμένο λόγο, από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $A'\equiv\Lambda$ δηλαδή η ΑΛ είναι συμμετριδιάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Εξωτερική συμμετροδιάμεσος που αντιστοιχεί στο Α, ως γνωστόν είναι η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ στο Α. (κάθε σημείο της εξωτερικής συμμετριδιαμέσου στο Α έχει την ιδιότητα να απέχει από τις πλευρές ΑΒ,ΑΓ αποστάσεις ανάλογες προς αυτές).

Στην πρόταση 2 όμως αποδείξαμε ότι η ΚΑ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ στο Α κι έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

Παρατηρήσεις:

1. Το θεώρημα 1 είναι μια γνωστή πρόταση στο πλαίσιο της θεωρίας των συμμετροδιαμέσων. Εκεί όμως τα σημεία K_α , K_β , K_γ λαμβάνονται ως τομές των πλευρών του εφαπτομενικού τριγώνου με τις ΒΓ , ΑΓ , ΑΒ αντίστοιχα.
2. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξωτερική συμμετροδιάμεσος στο Α, η διχοκάθετος χ_α και η πλευρά ΒΓ συντρέχουν σε σημείο K_α που ανήκει στην Απολλώνια περιφέρεια του ΑΒΓ προς τις κορυφές Β και Γ.
3. Το σημείο K_α οπου η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου στο Α τέμνει την ΒΓ, ισαπέχει από τα άκρα της διχοτόμου ΑΔ.



Σχ.6