

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 4] \rightarrow R$ με:
 $f(x) = x^2 - 8x + 10$
 - α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 - β) Να βρείτε την f^{-1} .
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x} - 3$.
 - α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 - β) Να βρείτε την f^{-1} .
 - γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τους άξονες.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-3} - 1$.
 - α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 - β) Να βρείτε την f^{-1} .
 - γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τους άξονες.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a - e^x}{1 + e^x}$, με $a \in R$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 3, -\frac{1}{2}\right)$.
 - α) Να βρείτε τον αριθμό a .
 - β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 - γ) Να βρείτε την f^{-1} .
 - δ) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \ln(x-2)$
 - α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 - β) Να ορίσετε την αντίστροφη της f .
 - γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y = 3$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{1-x}$, με $a \in R$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3}{2}, -2\right)$
 - α) Να βρείτε τον αριθμό a .
 - β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 - γ) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ f$ και f^{-1} και να εξετάσετε αν είναι ίσες.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{a - \sqrt{x}}{a + \sqrt{x}}$, με $a \in R$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{1}{4}, -\ln 3\right)$.
 - α) Να βρείτε τον αριθμό a και το πεδίο ορισμού της f .

- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .
8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x + 2$.
- α) Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι αντιστρέψιμες.
 β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.
 γ) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις h^{-1} και $g^{-1} \circ f^{-1}$ είναι ίσες.
9. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} και ικανοποιεί τη σχέση: $f^3(x) + 2f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 γ) Να ορίσετε την f^{-1} .
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 β) Να βρείτε το $f^{-1}(-3)$.
 γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(f(x^2 - 5) + 15) = 2$.
11. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 10$ και:
 $(f \circ f)(x) = 3x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
 β) Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.
 γ) Να λύσετε την εξίσωση:
 $f(f^{-1}(|x| - 2) - 5) = 2$.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(ae^x + 1)$, όπου $a \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2 \ln 2, 2 \ln 3)$.
- α) Να βρείτε τον αριθμό a .
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 γ) Να ορίσετε την f^{-1} .
 δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}(\ln 7)$.
13. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) + f(x) = 3x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = 8$.
- α) Να βρείτε το $f(8)$.
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 γ) Να βρείτε το $f^{-1}(3)$.
 δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(x^2 - 4x) - 3) = 3$.
14. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2, 6)$ και $B(4, 3)$.
- α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
 β) Να εξηγήσετε γιατί ορίζεται η f^{-1} .
 γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(x^2 - 5x) + 2) = 3$
 δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f(x^2 - x) - 3) < 4$

15. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το \mathbb{R} , για την οποία ισχύει:
 $f^3(x) + 2f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(-9x+15) = x-1$.
16. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3 - x + 12$.
 α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y = x$.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f(|x|-1)+8) < 1$.
17. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} και ικανοποιεί τη σχέση: $2f^3(x) + f(x) = x + 16$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 β) Να ορίσετε την f^{-1} .
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = x$.
18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x - 4$.
 α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β) Να βρείτε τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^2 - 13) < 2$.
19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + x + 3$
 α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .
 γ) Να λύσετε την ανίσωση:
 $f^{-1}(f(x^2 - 3) - 4) > 0$.
20. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$
 Να αποδείξετε ότι:
 α) η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .
 β) η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.
21. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συναρτήσεις, ώστε η $f \circ g$ να είναι 1-1.
 α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.
 β) Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει: $g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2)$
 να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
22. Δίνεται συνάρτηση: $f: (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:
 $(f \circ f)(x) = \ln x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$
 α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(2010)$.
 γ) Να αποδείξετε ότι $f(\ln x) = \ln(f(x))$ για κάθε $x \in (e, +\infty)$
 δ) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = e^{f(x)}$.

- 23.** Δίνονται συναρτήσεις $f, g : R \rightarrow R$ για τις οποίες ισχύει:
 $(f \circ g)(x) = -3x$ για κάθε $x \in R$.
 α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.
 β) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το R .
 γ) Να γράψετε τον τύπο της $g^{-1}(x)$ συναρτήσει του $f(x)$.
 δ) Αν η συνάρτηση f είναι φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
- 24.** Δίνεται συνάρτηση: $f : R \rightarrow R$ για την οποία ισχύει:
 $(f \circ f)(x) = 3x - 2$ για κάθε $x \in R$
 α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 β) Να βρείτε την τιμή $f(1)$
 γ) Να εκφράσετε την f^{-1} με τη βοήθεια της f .
 δ) Να αποδείξετε ότι $f(3x - 2) = 3f(x) - 2$.
 ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.
- 25.** Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύει:
 $f(e^x + 2) + f(x + 3) = x$ για κάθε $x \in R$
 α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(6 - f^{-1}(x^2 - 4)) > 0$
- 26.** Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x + x - 1$.
 α) Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_g με τον άξονα $x'x$.
 γ) Δίνεται συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ για την οποία ισχύει: $(g \circ f)(x) = x - 1$
 i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 ii) Να βρείτε το $f(1)$.
 iii) Να βρείτε τον τύπο $f^{-1}(x)$.
- 27.** Δίνεται 1-1 συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, καθώς και συνάρτηση $g : R \rightarrow R$ για την οποία ισχύει:
 $g(x) + f(x - 2) = g(g(x)) + f(0)$ για κάθε $x \in R$
 α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.
 β) Να βρείτε την τιμή $g(2)$.
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $g(e^x - 1) = 2$.
- 28.** Δίνεται συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ για την οποία ισχύει:
 $f^3(x) + 2f(x) = 12e^x$ για κάθε $x \in R$
 α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.
 β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.
 γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 δ) Να λύσετε την εξίσωση:
 $f(|x| - 3) = e^{2 \ln 2} + \ln \frac{1}{e^2}$.
- 29.** Δίνεται συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ για την οποία ισχύει:
 $f(f(x)) - 2 = x$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το \mathbb{R} .
 γ) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = f(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x - 1) = f^{-1}(3)$.
- 30.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + ax - 3$, με $a \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(\ln 3, \ln 9)$.
- α) Να βρείτε τον αριθμό a .
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.
 δ) Να λύσετε την ανίσωση:
 $f(f(\ln(x^2 + 2)) - 2 \ln 3) < -2$.
- 31.** Δίνονται συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
 $(g \circ f)(x) = -3x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 Επίσης η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, -1)$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 β) Να λύσετε την ανίσωση $f(|x| - 1) > 3$.
- 32.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \ln x$ και συνάρτηση $g : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$.
 β) Αν επιπλέον ισχύει $(g \circ f)(x) = x - \frac{3}{\ln x}$, να βρείτε τη συνάρτηση g .
 γ) Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$.
- 33.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f(a) + f(\beta) = f(a \cdot \beta)$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}^*$
 Επίσης η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.
- α) Να βρείτε το $f(1)$.
 β) Να αποδείξετε ότι $f(a) - f(\beta) = f\left(\frac{a}{\beta}\right)$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}^*$.
 γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 δ) Να λύσετε την εξίσωση:
 $f(x+1) + f(x+5) = f(x+2) + f(x+3)$.
- 34.** Δίνονται συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(4) = 1$, η f είναι 1-1 και :
 $(f \circ g)(x) = 2x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.
 β) Να βρείτε το $g(2)$.
 γ) Αν επιπλέον είναι $g(x) = 3x + a$, με $a \in \mathbb{R}$, να βρείτε:
 i) τον αριθμό a , ii) τον τύπο της f .
- 35.** Δίνονται συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, με την f να είναι γνησίως φθίνουσα και τη g γνησίως αύξουσα.
- α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(\ln x) \cdot g(0) > g(\ln x) \cdot f(0)$

γ) Αν επιπλέον οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x=2$, να λύσετε την εξίσωση $h(e^x + 1) = 1$.

36. Δίνονται 1-1 συναρτήσεις $f, g: R \rightarrow R$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) - (f \circ g^{-1})(x) = 8 \text{ και } 3(f \circ g)(x) + 2(f \circ g^{-1})(x) = 10x - 7 \text{ για κάθε } x \in R.$$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

β) Έστω συνάρτηση $h: R \rightarrow R$ τέτοια, ώστε:

$$h(g(f(x))) = e^{-2x} - 4x - 2 \text{ για κάθε } x \in R$$

ι) Να βρείτε την $h(x)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη.

iii) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{e}{e^{x^2}} - \frac{e}{e^{3x}} > 2x^2 - 6x$.

37. Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ και η συνάρτηση:

$$f: R \rightarrow R \text{ και η συνάρτηση: } g(x) = f(x) - (f \circ f)(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη.

β) Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει ότι $g(|2z-1|) - g(|z-2|) = 0$, να βρείτε το $|z|$.

γ) Δίνεται μιγαδικός αριθμός w . Αν τα σημεία $A(2, |w-3i|)$ και $B(3, |w+i|)$ ανήκουν στη C_f , να αποδείξετε ότι $\text{Im}(w) < 1$.

38. Δίνεται συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ ώστε:

$$f(x-y) = f(x) - f(y) \text{ για κάθε } x, y \in R.$$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $x = 0$.

ι) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii) Δίνεται μιγαδικός αριθμός z , με $|z|=1$, για τον οποίο ισχύει:

$$f\left(z + \frac{i}{z}\right) + f(3) = f(7) \text{ Να βρείτε το } \text{Im}\left(\frac{z}{z}\right).$$