“Στη θεωρία των εξισώσεων εξέτασα τις περιπτώσεις όπου οι εξισώσεις είναι δυνατόν να επιλυθούν με ριζικά. Αυτό μου έδωσε την ευκαιρία να αναπτύξω πληρέστερα τη θεωρία και να περιγράψω όλους τους δυνατούς μετασχηματισμούς μιας εξίσωσης οι οποίοι είναι αποδεκτοί ακόμη και όταν αυτή είναι αδύνατον να επιλυθεί με ριζικά.”

Evariste Galois

“Πραγματεία περί των συνθηκών για την επίλυση εξισώσεων με ριζικά.”

1. Εξισώσεις πρώτου βαθμού

Μια εξίσωση πρώτου βαθμού είναι της μορφής αχ=β (1) με $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$ και $\alpha\neq 0$. (το $\mathbb{F}$ συμβολίζει κάποιο σώμα, όπως το $\mathbb{Q}$ το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$). Η πρωτοβάθμια εξίσωση έχει πάντοτε μια και μοναδική λύση η οποία επίσης ανήκει στο $\mathbb{F}$ και δίνεται από τον τύπο $\chi=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

2. Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Οι εξισώσεις δευτέρου βαθμού έχουν τη μορφή $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ (2.1) με $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{F}$, $\alpha\neq 0$.

Αν χ_1,χ_2 συμβολίζει τις ρίζες της (2) τότε όπως είναι γνωστό ισχύει

$$\chi_1+\chi_2=-\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\chi_1\chi_2=\frac{\gamma}{\alpha} \qquad (2.2)$$

Αν μπορούμε να λύσουμε το παραπάνω σύστημα μπορούμε και να εκφράσουμε τις ρίζες της (2.1) συναρτήσει των συντελεστών της α,β,γ.

Μια προσπάθεια να λύσουμε το σύστημα με τη μέθοδο αντικατάστασης μας οδηγεί και πάλι στην αρχική εξίσωση (2). Εδώ θα δώσουμε μια λύση που να είναι σχετική με την θεωρία Galois, στην οποία κεντρικό ρόλο παίζει η έννοια της συμμετρίας.

Οι εξισώσεις του συστήματος (2.2) είναι συμμετρικές. Με αυτό εννοούμε πως εναλλάσσοντας τις ρίζες χ_1,χ_2 μεταξύ τους , δηλαδή κάνοντας χρήση της αντιστοιχίας $\chi_1\rightarrow \chi_2$, $\chi_2\rightarrow\chi_1$ οι εξισώσεις

παραμένουν αναλλοίωτες και φυσικά το ίδιο συμβαίνει και με το σύστημα (2.2). Η παράσταση $\chi_1-\chi_2$ δεν είναι συμμετρική καθότι εναλλάσσοντας τα χ_1,χ_2 αυτή αλλάζει πρόσημο. Το τετράγωνο όμως αυτής $(\chi_1-\chi_2)^2$ είναι προφανώς συμμετρική παράσταση.
Δεδομένου ότι $(\chi_1-\chi_2)^2=(\chi_1+\chi_2)^2-4\chi_1\chi_2$ βλέπουμε πως $(\chi_1-\chi_2)^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}-4\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\Delta}{\alpha^2}$ όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, επομένως $\chi_1-\chi_2=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}$ (2.3).
Συνδυάζοντας τώρα κάθε μια από τις (2.3) με την πρώτη εξίσωση του συστήματος (2.2) καταλήγουμε σε δυο απλά γραμμικά συστήματα των οποίων οι λύσεις μας δίνουν το γνωστό τύπο που εκφράζει τις ρίζες της (2.1) συναρτήσει των συντελεστών α,β,γ και τη χρήση μιας τετραγωνικής ρίζας:

$\chi_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ (2.4) .

Η κεντρική ιδέα της παραπάνω λύσης είναι το γεγονός ότι μια ρητή συμμετρική αλγεβρική παράσταση $P(\chi_1,\chi_2)$ μπορεί πάντα να εκφραστεί ως ρητή συνάρτηση των «στοιχειωδών» συμμετρικών παραστάσεων $S=\chi_1+\chi_2$ και $P=\chi_1\chi_2$.

Έτσι για παράδειγμα $(\chi_1-\chi_2)^2=S^2-4P$, $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$,

$x_1^3+x_2^3=S^3-3S\cdot P$ $\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{S}{P}$ $\quad \frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}=\frac{S^4-4S^2P+2P^2}{P^4}$.

Η παραπάνω πρόταση που διατυπώσαμε καλείται συνήθως θεμελιώδες θεώρημα των συμμετρικών συναρτήσεων. Θα δώσουμε μια απόδειξη αυτής της πρότασης για την περίπτωση ενός συμμετρικού πολυωνύμου $P(\chi_1,\chi_2)$.

Θέτουμε $S_n=x_1^n+x_2^n$, $n\geq1$. Έτσι $S_1=x_1+x_2=S$, $S_2=x_1^2+x_2^2=S^2-2P$. Είναι πολύ απλό να δούμε ότι ισχύουν οι ταυτότητες: $x_1^2-Sx_1+P=0$ και $x_2^2-Sx_2+P=0$. Πολλαπλασιάζοντας αυτές επί x_1^{n-2} και x_2^{n-2} αντίστοιχα και στη συνέχεια προσθέτοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν κατά μέλη, προκύπτει η εξής αναδρομική σχέση: $S_n-S\cdot S_{n-1}+P\cdot S_{n-2}=0 \Leftrightarrow S_n=S\cdot S_{n-1}-P\cdot S_{n-2}$ (2.5) για κάθε φυσικό $n\geq2$.

Η σχέση (2.5) επαγωγικά μας δείχνει ότι η παράσταση S_n μπορεί να εκφραστεί ως πολυώνυμο των στοιχειωδών συμμετρικών παραστάσεων S και P.

Αν τώρα έχουμε ένα πολυώνυμο $P(\chi_1,\chi_2)$, αυτό είναι ένα άθροισμα μονώνυμων της μορφής $\alpha\cdot\chi_1^{\nu}\chi_2^{\mu}$ με $\nu,\mu\in \mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{F}$. Αν το πολυώνυμο είναι συμμετρικό τότε για κάθε όρο της μορφής $\alpha\cdot\chi_1^{\nu}\chi_2^{\mu}$ θα πρέπει να περιέχει και τον όρο $\alpha\cdot\chi_1^{\mu}\chi_2^{\nu}$ κι έτσι στο πολυώνυμο θα εμφανίζεται το άθροισμα $\alpha\cdot\chi_1^{\nu}\chi_2^{\mu} + \alpha\cdot\chi_1^{\mu}\chi_2^{\nu}=\alpha\cdot(\chi_1\chi_2)^{\mu}\cdot S_{\nu-\mu} = \alpha\cdot P^{\mu}\cdot S_{\nu-\mu}$ (υποθέτουμε ότι $\nu\geq\mu$). Όμως το $S_{\nu-\mu}$ εκφράζεται ως πολυώνυμο των S,P και έτσι καταλαβαίνουμε πως και το $P(\chi_1,\chi_2)$ μπορεί να εκφραστεί ως πολυώνυμο των S , P.

3. Εξισώσεις τρίτου βαθμού

Μέθοδοι για την επίλυση εξισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού ήταν γνωστές από την εποχή των αρχαίων Βαβυλωνίων και των αρχαίων Ελλήνων. Η αλγεβρική επίλυση των εξισώσεων τρίτου βαθμού πραγματοποιήθηκε μόλις τον 16^0 αιώνα. (Νωρίτερα , τον 11^0 αιώνα, ο Πέρσης μαθηματικός και ποιητής Ομάρ Καγιάμ είχε δώσει γεωμετρική λύση των τριτοβάθμιων εξισώσεων). Πρωταγωνιστές στην υπόθεση αυτή ήταν οι Ιταλοί μαθηματικοί Scipione del Ferro,Antonio Maria Fior και ο Nikolo Fontana περισσότερο γνωστός ως Tartaglia (Βραδύγλωσσος).

Η γενική τριτοβάθμια εξίσωση έχει τη μορφή $\alpha_3\chi^3+\alpha_2\,\chi^2+\alpha_1\,\chi+\alpha_4=0$ με $\alpha_4\neq 0$. Αν τα $\alpha_{1,2,3,4,}$, ανήκουν σε ένα σώμα $\mathbb{F}$ διαιρώντας με α_4 τα δυο μέλη της εξίσωσης, παίρνουμε μια εξίσωση της οποίας ο συντελεστής της τρίτης δύναμης ισούται με 1.

Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι η γενική μορφή της τριτοβάθμιας εξίσωσης είναι

$\chi^3+\kappa\chi^2+\lambda\chi+\mu=0$. Θέτοντας χ= $\psi-\dfrac{\kappa}{3}$ η δοθείσα μετατρέπεται σε μια εξίσωση τρίτου βαθμού χωρίς δευτεροβάθμιο όρο. Μπορούμε λοιπόν δίχως βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι η εξίσωσή μας είναι της μορφής $\chi^3+\alpha\chi+\beta=0$. (3.1)

Για να επιλύσουμε την (3.1) θέτουμε $\chi=\psi+\zeta$ (3.2) οπότε έχουμε:

$\psi^3+\zeta^3+3\psi\zeta(\psi+\zeta)+\alpha(\psi+\zeta)+\beta=0$. Στη συνέχεια θέτουμε $3\psi\zeta=-\alpha \Leftrightarrow$

$\psi\zeta = -\frac{\alpha}{3}$ (3.3)

Καταλήγουμε έτσι στο σύστημα

$$\begin{cases} \psi\zeta = -\frac{\alpha}{3} \\ \psi^3+\zeta^3 = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^3\zeta^3 = -\frac{\alpha^3}{27} \\ \psi^3+\zeta^3 = -\beta \end{cases} \qquad (3.4)$$

Αφού λοιπόν ξέρουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ποσοτήτων ψ^3 και ζ^3 αυτές οι ποσότητες μπορούν να υπολογιστούν λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$t^2+\beta t-\frac{a^3}{27}=0$ (3.5). Έχουμε $\Delta = \beta^2+\frac{4\alpha^3}{27} = 4[(\frac{\beta}{2})^2+(\frac{\alpha}{3})^3]$ επομένως

$$\psi^3 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\beta}{2}-\sqrt{(\frac{\alpha}{3})^3+(\frac{\beta}{2})^2} \Leftrightarrow \psi = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2}-\sqrt{(\frac{\alpha}{3})^3+(\frac{\beta}{2})^2}}$$

(3.5.1)

$$\zeta^3 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\beta}{2}+\sqrt{(\frac{\alpha}{3})^3+(\frac{\beta}{2})^2} \Leftrightarrow \zeta = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2}+\sqrt{(\frac{\alpha}{3})^3+(\frac{\beta}{2})^2}}$$

(3.5.2)

Καταλήγουμε έτσι στον τύπο που δίνει τη λύση της (3.1)

$$\chi = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2}-\sqrt{(\frac{\alpha}{3})^3+(\frac{\beta}{2})^2}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2}+\sqrt{(\frac{\alpha}{3})^3+(\frac{\beta}{2})^2}} \quad (3.6)$$

Ο παραπάνω τύπος (3.6) στη βιβλιογραφία αναφέρεται πολλές φορές ως τύπος του Gardano, από το όνομα του Girolamo Gardano (1501-1576) , ενός Ιταλού μαθηματικού που το 1545 δημοσίευσε το έργο του Ars Magna, μια μεγάλη μελέτη πάνω στην άλγεβρα, στην οποία συμπεριέλαβε ως κορυφαίο σημείο, τη λύση των κυβικών εξισώσεων. Ο Tartaglia τον κατηγόρησε για κλοπή πνευματικής ιδιοκτησίας και ακολούθησε μια τρομερή λογομαχία μεταξύ τους από την οποία ο Tartaglia ήταν ίσως τυχερός που γλύτωσε τη ζωή του.

Βρήκαμε λοιπόν τον τύπο που εκφράζει τη λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης συναρτήσει των συντελεστών της.

άσκηση: Να λυθεί η εξίσωση: χ^3-15χ-4=0. Αυτήν την εξίσωση καταρχήν μπορούμε να τη λύσουμε δίχως τη χρήση του τύπου (3.6) αφού με παραγοντοποίηση βρίσκουμε χ^3-15χ-4=0 ⇔ (χ-4)(χ^2+4χ+1)=0 κι έτσι βρίσκουμε τις ρίζες της που είναι οι αριθμοί $\chi_1 = 4, \quad \chi_2 = -2-\sqrt{3}, \quad \chi_3 = -2+\sqrt{3}$

Ας επιχειρήσουμε τώρα να βρούμε τις ρίζες της με εφαρμογή του παραπάνω τύπου Εδώ έχουμε α= -15, β= -4. υπολογίζουμε την παράσταση

$(\frac{\beta}{2})^2 + (\frac{\alpha}{3})^3 = 4-125 = -121$<0. Σκεπτόμενοι ως μαθηματικοί του $16^{ου}$ αιώνα είμαστε μπροστά σε μια δυσάρεστη έκπληξη! Δεδομένου ότι η τετραγωνική ρίζα αρνητικού πραγματικού αριθμού δεν ορίζεται ο τύπος του Cardano δεν μπορεί να λειτουργήσει! Όμως η εξίσωση όπως είδαμε έχει σίγουρα τρεις πραγματικές λύσεις. Τι μπορεί να συμβαίνει; Για αρκετά χρόνια μετά τη δημοσίευση της Ars magna ο ίδιος ο Cardano και πολλοί άλλοι αλγεβριστές προσπαθούσαν να δώσουν μια εξήγηση σε αυτό το ενοχλητικό φαινόμενο. Το 1572 στη Bolonia είδε το φως της δημοσιότητας ένα βιβλίο άλγεβρας γραμμένο από τον Raffaele Bombelli. Στο βιβλίο αυτό ο συγγραφέας του εισάγει τις εκφράσεις piu di meno και meno di meno για να εκφράσει τις παραστάσεις $\sqrt{-1} \quad \textit{και} \quad -\sqrt{-1}$. Στη συνέχεια θεωρεί ότι οι πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών μπορούν να επεκταθούν σε ένα ευρύτερο σύνολο «αριθμών» που περιλαμβάνει και τις εκφράσεις piu di meno και meno di meno. Για να πάρουμε μια γεύση της δουλειάς του Bombelli αντί να θεωρήσουμε τις δικές του εκφράσεις ας υιοθετήσουμε ένα συμβολισμό που εισάχθηκε αργότερα από τον Euler και είναι σε χρήση μέχρι τις μέρες μας. Θέτουμε λοιπόν $i = \sqrt{-1}$. Τότε i^2=-1, $\sqrt{-121} = \sqrt{121}\sqrt{-1} = 11i$. $(2-i)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 - i^3$= 8-12i-6+i=2-11i. Παρόμοια βρίσκουμε $(2+i)^3$=2+11i. Επιστρέφοντας στον τύπο του Cardano θα έχουμε για την περίπτωση της εξίσωσης χ^3-15χ-4=0 :

$$\chi = \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2-11i} + \sqrt[3]{2+11i}$$

$\chi = \sqrt[3]{(2-11i)^3} + \sqrt[3]{(2+11i)^3} = 2-11i+2++11i = 4$. Καταπληκτικό! Βρήκαμε την πραγματική λύση της εξίσωσης με χρήση των «φανταστικών» εκφράσεων που εισήγαγε ο Bombelli. Στα χρόνια που ακολούθησαν πολλοί ερευνητές δημοσίευσαν εργασίες πάνω σε αυτές τις νέες αριθμητικές οντότητες της μορφής $\alpha+\beta\cdot i$ με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ και $i^2=-1$. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους : Gaspar Wessel-1797, Jean Robert Argand-1806, G.V.Mourey-1828 και το μεγάλο Γερμανό μαθηματικό Gauss-1831 οι εργασίες των οποίων θεμελίωσαν αυτό που σήμερα είναι γνωστό ως το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα λύσουμε την τριτοβάθμια εξίσωση $\chi^3+\alpha\chi+\beta=0$. (3.1) με έναν διαφορετικό τρόπο.

Αν υποθέσουμε πως χ_1, χ_2, χ_3 είναι οι λύσεις της τότε από την ταυτότητα

$\chi^3+\alpha\chi+\beta= (\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)(\chi-\chi_3)=\chi^3-(\chi_1+\chi_2+\chi_3)\chi^2+(\chi_1\chi_2+\chi_2\chi_3+\chi_1\chi_3)\chi-\chi_1\chi_2\chi_3$

προκύπτει ότι $$\begin{cases} \chi_1+\chi_2+\chi_3=0 \\ \chi_1\chi_2+\chi_2\chi_3+\chi_3\chi_1=\alpha \\ \chi_1\chi_2\chi_3=-\beta \end{cases} \quad (3.7)$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορούμε να λύσουμε το παραπάνω σύστημα, ώστε να εκφράσουμε τους αγνώστους χ_1,χ_2,χ_3 συναρτήσει των συντελεστών α,β.

Οι εξισώσεις του συστήματος (3.7) είναι συμμετρικές ως προς χ_1,χ_2,χ_3. Τι εννοούμε όμως ακριβώς με τη λέξη «συμμετρικές»;

Αν θεωρήσουμε το σύνολο Τ={1,2,3} μπορούμε να δημιουργήσουμε έξι διαφορετικές διατάξεις των στοιχείων του:

1 2 3, 2 3 1, 3 2 1, 1 3 2, 2 1 3, 3 1 2.

Κάθε τέτοια διάταξη μπορεί να θεωρηθεί σαν μια 1-1 και επί απεικόνιση $\sigma:T \to T$. Οι έξι διαφορετικές απεικονίσεις μπορούν να παρασταθούν με τη μορφή ενός πίνακα 2 γραμμών:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} \quad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \quad \sigma_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} \quad \sigma_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

Με το συμβολισμό αυτό σε κάθε στοιχείο της πρώτης γραμμής αναγράφεται από κάτω του το αντίστοιχό του μέσω της σ.

Έτσι για παράδειγμα είναι $\sigma_2(1)=2$, $\sigma_5(3)=1$, $\sigma_5(1)=3$.

Κάθε τέτοια 1-1 και επί απεικόνιση του Τ στον εαυτό του λέγεται μετάθεση του Τ. Για το σύνολο των Τ των τριών στοιχείων έχουμε 6 μεταθέσεις. ($6=1\cdot2\cdot3=3!$). Για ένα σύνολο αποτελούμενο από ν στοιχεία θα είχαμε $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\nu=\nu!$ μεταθέσεις, γιατί σε κάθε μετάθεση ξεκινώντας με το 1 μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε με ν διαφορετικούς τρόπους, στη συνέχεια το 2 μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε με ν-1 τρόπους από τα στοιχεία που έχουν απομείνει και τελικά φτάνοντας σταδιακά στο ν μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε με έναν και μόνο τρόπο. Με βάση λοιπόν τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης θα υπάρχουν $\nu\cdot(\nu-1)\ldots2\cdot1=\nu!$ διαφορετικοί τρόποι δημιουργίας μεταθέσεων ενός συνόλου ν στοιχείων.
Το σύνολο των μεταθέσεων του συνόλου $T_\nu=\{1,2,3,\ldots,\nu\}$ το συμβολίζουμε με S_ν. Έτσι $S_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\}$.

Στο S_3 (και γενικότερο στο S_ν) μπορεί να οριστεί η εσωτερική πράξη ο της σύνθεσης μεταξύ των στοιχείων του. Η ορολογία εσωτερική πράξη δηλώνει ότι η σύνθεση μεταξύ δυο μεταθέσεων του Τ είναι και πάλι μετάθεση του Τ.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

Η πράξη ο της σύνθεσης μεταθέσεων (που για ευκολία θα την παριστάνουμε με μια τελεία ή ακόμα και απλώς παραθέτοντας τις μεταθέσεις) έχει τις εξής ιδιότητες:

1) Αν $\sigma,\tau \in S_3$ τότε $\sigma \circ \tau \in S_3$ συνθήκη κλειστότητας.

2) $\sigma \circ (\tau \circ \mu)= (\sigma \circ \tau)\circ \mu$ Προσεταιριστική ιδιότητα.

3) $\sigma \circ \sigma_1=\sigma_1 \circ \sigma = \sigma$ Η μετάθεση σ_1 είναι το ουδέτερο στοιχείο. Συχνά το συμβολίζουμε και με Ι και το λέμε ταυτοτική μετάθεση.

4) Για κάθε μετάθεση σ, υπάρχει μια μετάθεση σ^{-1}

(αντίστροφη της σ) τέτοια ώστε σ ο σ^{-1}=σ^{-1} ο σ = σ_1.

Για να βρούμε την αντίστροφη μετάθεση της σ απλώς αλλάζουμε τις γραμμές της σ μεταξύ τους. Για παράδειγμα

αν $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{τότε} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη η οποία έχει τις παραπάνω ιδιότητες 1,2,3,4 λέμε ότι έχει τη **δομή Ομάδας**.

Θα μελετήσουμε τώρα λίγο καλύτερα την ομάδα S_3.

$$\sigma_3^{\ 2} = \sigma_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3^{\ 3} = \sigma_3^{\ 2}\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\sigma_2^{\ 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

Ομοίως προκύπτει ότι $\sigma_4^{\ 2} = \mathrm{I} \quad , \quad \sigma_5^{\ 2} = \mathrm{I}$

$$\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_5$$

$\sigma_3\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_4$. Όπως βλέπουμε η πράξη της σύνθεσης **δεν είναι αντιμεταθετική**.

$$\sigma_3^{\ 2}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_5$$

Μπορούμε να γράψουμε τελικά

$S_3=\{\mathrm{I},\sigma_3,\sigma_3^{\ 2},\sigma_2,\sigma_2\sigma_3,\sigma_2\sigma_3^{\ 2}\}$ και $\sigma_3^{\ 3}=\mathrm{I}$, $\sigma_2^{\ 2}=\mathrm{I}$.

Μετά από την παραπάνω εισαγωγή μπορούμε πλέον να απαντήσουμε με ακρίβεια τι σημαίνει να είναι συμμετρική μια παράσταση. Αν λοιπόν $f(\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ είναι συνάρτηση των χ_1,χ_2,χ_3 μια μετάθεση σ μπορεί να δράσει πάνω στην f με τον εξής τρόπο: $\sigma\cdot f(\chi_1,\chi_2,\chi_3)=f(\chi_{\sigma(1)},\chi_{\sigma(2)},\chi_{\sigma(3)})$

Για παράδειγμα αν $\varphi(\chi_1,\chi_2,\chi_3)=(\chi_1-\chi_2)\chi_3^2$ και $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$) τότε $\sigma\cdot\varphi=(\chi_2-\chi_3)\chi_1^2$.

Αν $\Delta(\chi_1,\chi_2,\chi_3)=(\chi_1-\chi_2)(\chi_2-\chi_3)(\chi_3-\chi_1)$ τότε $\sigma\cdot\Delta=(\chi_2-\chi_3)(\chi_3-\chi_1)(\chi_1-\chi_2)=\Delta$. Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε πως η Δ μένει αναλλοίωτη από τη δράση της σ.

Αν για μια συνάρτηση $f(\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ ισχύει $\sigma\cdot f(\chi_1,\chi_2,\chi_3)=f(\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ για κάθε $\sigma\in S_3$ τότε λέμε ότι η $f(\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ είναι **συμμετρική.** Οι παραστάσεις

$$S_1=\chi_1+\chi_2+\chi_3$$

$$S_2=\chi_1\chi_2+\chi_2\chi_3+\chi_3\chi_1$$

$$S_3=\chi_1\chi_2\chi_3$$

είναι συμμετρικές και καλούνται στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις στις τρεις μεταβλητές. **Το θεμελιώδες θεώρημα των συμμετρικών συναρτήσεων μας βεβαιώνει ότι κάθε ρητή συμμετρική συνάρτηση, μπορεί να γραφτεί ως ρητή συνάρτηση των στοιχειωδών συμμετρικών συναρτήσεων**. Για παράδειγμα $\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2=S_1^2-2S_2$, $\chi_1^3+\chi_2^3+\chi_3^3=S_1^3-3S_1S_2+3S_3$.

Το υποσύνολο $A_3=\{I,\sigma_3,\sigma_3^2\}$ της S_3 είναι εύκολο να δούμε ότι αποτελεί επίσης ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Λέμε ότι το A_3 είναι **υποομάδα** της S_3 και το γεγονός αυτό το συμβολίζουμε με $A_3<S_3$. Το πλήθος των στοιχείων μιας ομάδας λέγεται **τάξη** της ομάδας και συμβολίζεται με $|S_3|$ ή $[S_3:1]$. Έτσι $[S_3:1]=6$ και $[A_3:1]=3$. Το πηλίκο $[S_3:1]$ / $[A_3:1]$ καλείται **δείκτης** της A_3 στην S_3. Στην περίπτωσή μας είναι $[S_3:1]$ / $[A_3:1]=2$. Αν Η είναι μια υποομάδα της ομάδας S_3 και $\sigma\in S_3$,τότε το σύνολο των στοιχείων της μορφής $\sigma^{-1}\eta\sigma$ με $\eta\in H$ αποτελεί ένα σύνολο το οποίο συμβολίζουμε με $\sigma^{-1}H\sigma$ και είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι αποτελεί υποομάδα της S_3 και λέγεται υποομάδα **συζυγής** της Η.

Καθώς το σ διατρέχει την ομάδα S_3 τα σύνολα $\sigma^{-1}H\sigma$ μας δίνουν και όλες τις συζυγείς υποομάδες της Η. Στην περίπτωση που όλες αυτές οι υποομάδες ταυτίζονται, δηλαδή όταν

$\sigma^{-1}H\sigma = H$ για κάθε $\sigma \in S_3$ λέμε ότι η Η είναι μια κανονική (ή ορθόθετη) υποομάδας της S_3 και το γεγονός αυτό το συμβολίζουμε με $H \lhd S_3$.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι είναι $A_3 \lhd S_3$.

Ας θεωρήσουμε την παράσταση $\Delta(\chi_1,\chi_2,\chi_3)= (\chi_1-\chi_2)(\chi_2-\chi_3)(\chi_3-\chi_1)$. Παρατηρούμε ότι $I\cdot\Delta=\Delta$, $\sigma_3\cdot\Delta=\Delta$ και $\sigma_3^2\cdot\Delta=\Delta$ δηλαδή η δράση όλων των στοιχείων της A_3 αφήνει αναλλοίωτη την παράσταση Δ. Πολλές φορές το γεγονός αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση Δ ανήκει (όχι βέβαια με τη συνολοθεωρητική σημασία) στην ομάδα A_3. Αν και η παράσταση Δ δεν είναι συμμετρική, η παράσταση Δ^2 είναι συμμετρική. Αυτό σημαίνει, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα των συμμετρικών συναρτήσεων, ότι το Δ^2 θα εκφράζεται ως πολυωνυμική συνάρτηση των στοιχειωδών συμμετρικών παραστάσεων s_1,s_2,s_3. Αυτό πάλι με τη σειρά του σημαίνει ότι το Δ θα εκφράζεται συναρτήσει των s_1,s_2,s_3 και της εξαγωγής μιας τετραγωνικής ρίζας. Αυτό το φαινόμενο είναι γενικότερο και δείχνει ακριβώς το ρόλο που παίζουν οι ομάδες στη μελέτη αλγεβρικών θεμάτων. Ποιο συγκεκριμένα **αν G είναι μια πεπερασμένη ομάδα, Η μια κανονική υποομάδα της με δείκτη πρώτο αριθμό ρ, τότε οι συναρτήσεις που ανήκουν στην Η (δηλαδή μένουν αναλλοίωτες από τη δράση της Η) μπορούν να εκφραστούν από τις συναρτήσεις της G (δηλαδή τις συναρτήσεις που αφήνει αναλλοίωτες η G) με εξαγωγή κάποιας ρίζας τάξης ρ.**

Στη μελέτη μας παρατηρούμε ότι $\{I\} \lhd A_3 \lhd S_3$ και $[A_3:\{I\}]=3$ $[S_3:A_3]=2$. Στην υποομάδα {Ι} ανήκουν οι συναρτήσεις χ_1,χ_2,χ_3 άρα αυτές θα εκφράζονται μέσω συναρτήσεων που ανήκουν στην A_3 με εξαγωγή μιας κυβικής ρίζας. Οι συναρτήσεις όμως που ανήκουν στην A_3 εκφράζονται μέσω των συναρτήσεων της S_3 δηλαδή συναρτήσει των στοιχειωδών συμμετρικών συναρτήσεων s_1,s_2,s_3 με εξαγωγή κάποιας τετραγωνικής ρίζας. Άρα τελικά προκύπτει ότι οι ρίζες χ_1,χ_2,χ_3 της τριτοβάθμιας εξίσωσης μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των συντελεστών της και τη χρήση τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Όπως λέμε η τριτοβάθμια εξίσωση **επιλύεται με ριζικά**.

Θα δούμε τώρα πώς μπορεί να βρει κάποιος στην πράξη τις προαναφερθείσες εκφράσεις. Είναι $\sigma_3^3=I$ και γι' αυτό το λόγο θεωρούμε μια μιγαδική κυβική ρίζα της μονάδας ω. Έχουμε $\omega^3=1\Rightarrow\omega^2+\omega+1=0$. Ας είναι λοιπόν $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Οι συναρτήσεις $\theta(\omega)=\chi_1+\omega\chi_2+\omega^2\chi_3$ και $\xi(\omega)=\chi_1+\omega^2\chi_2+\omega\chi_3=\theta(\omega^2)$ δεν παρουσιάζουν καμία συμμετρία. (Ανήκουν στις συναρτήσεις της {I}). Παρατηρούμε ότι $\sigma_3\cdot\theta^3=\sigma_3\cdot(\chi_1+\omega\chi_2+\omega^2\chi_3)^3=(\chi_2+\omega\chi_3+\omega^2\chi_1)^3=(\omega^3\chi_2+\omega\chi_3+\omega^2\chi_1)^3=\omega^3(\omega^2\chi_2+\chi_3+\omega\chi_1)^3=(\omega^2\chi_2+\omega^3\chi_3+\omega\chi_1)^3=\omega^3(\chi_1+\omega\chi_2+\omega^2\chi_3)^3=\theta^3$.

Ομοίως έχουμε $\sigma_3^2\cdot\theta^3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}(\chi_1+\omega\chi_2+\omega^2\chi_3)^3=\theta^3$. Έτσι η συνάρτηση θ^3 ανήκει στις συναρτήσεις που αφήνει αναλλοίωτες η ομάδα A_3. Το ίδιο ισχύει και για την παράσταση $\xi=\theta(\omega^2)$.

Οι λύσεις χ_1,χ_2,χ_3 μπορούν να εκφραστούν αρχικά με όρους των $\theta(\omega)$, $\theta(\omega^2)$. Πράγματι θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases}\chi_1+\chi_2+\chi_3=0\\ \chi_1+\omega\chi_2+\omega^2\chi_3=\theta(\omega)\\ \chi_1+\omega^2\chi_2+\omega\chi_3=\theta(\omega^2)\end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις βρίσκουμε

$\chi_1=\frac{1}{3}(\theta(\omega)+\theta(\omega^2))$ Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση του συστήματος πρώτα επί ω^2 και ω αντίστοιχα και κατόπιν επί ω και ω^2 και προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις που προκύπτουν βρίσκουμε και τις άλλες λύσεις

$\chi_2=\frac{1}{3}(\omega^2\theta(\omega)+\omega\theta(\omega^2))$ $\quad και \quad$ $\chi_3=\frac{1}{3}(\omega\theta(\omega)+\omega^2\theta(\omega^2))$. Το πρόβλημά μας επομένως ανάγεται στην έκφραση του θ(ω) συναρτήσει των συντελεστών α,β της εξίσωσης (3.1). Για το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι

$$\theta(\omega)\theta(\omega^2) = (\chi_1 + \omega\chi_2 + \omega^2\chi_3)(\chi_1 + \omega^2\chi_2 + \omega\chi_3) =$$

$$\chi_1^{\ 2} + \chi_2^{\ 2} + \chi_3^{\ 2} + \omega(\chi_1\chi_2 + \chi_2\chi_3 + \chi_3\chi_1) + \omega^2(\chi_1\chi_2 + \chi_2\chi_3 + \chi_3\chi_1)$$

$$= s_1^{\ 2} - 2s_2 + s_2(\omega + \omega^2) = -3s_2 = -3\alpha$$

$$\textit{οπότε} \quad \theta^3\left(\omega\right)\theta^3\left(\omega^2\right) = -27\alpha^3$$

επίσης

$$\theta^3\left(\omega\right) + \theta^3(\omega^2) = (\theta(\omega) + \theta(\omega^2))^3 - 3\theta(\omega)\theta(\omega^2)(\theta(\omega) + \theta(\omega^2)) =$$

$$(3\chi_1)^3 + 3\cdot 3\alpha\cdot 3\chi_1 =$$

$$27(\chi_1^{\ 3} + \alpha\chi_1) = -27\beta$$

Αυτό σημαίνει πως οι ποσότητες $\theta^3(\omega)$ και $\theta^3(\omega^2)$ μπορούν να υπολογιστούν ως ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$t^2+27\beta t-27\ \alpha^3=0$. Λύνοντάς την βρίσκουμε

$$\theta(\omega) = 3\left(\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{(\frac{\alpha}{3})^3 + (\frac{\beta}{2})^2}}\right) \quad \textit{και} \quad \theta(\omega^2) = 3\left(\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{(\frac{\alpha}{3})^3 + (\frac{\beta}{2})^2}}\right)$$

Ξαναβρίσκουμε έτσι τον περίφημο τύπο των Cardano-Tartaglia

$$\chi_1 = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{(\frac{\alpha}{3})^3 + (\frac{\beta}{2})^2}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{(\frac{\alpha}{3})^3 + (\frac{\beta}{2})^2}}$$

Άσκηση: Αν χ_1,χ_2,χ_3 είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(\chi)=\chi^3+\alpha\chi+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να αποδειχτεί ότι : $27\beta^2+4\alpha^3=-[(\chi_1-\chi_2)(\chi_2-\chi_3)(\chi_3-\chi_1)]^2$. Στη συνέχεια να αποδειχτεί ότι:

α) Το $P(\chi)$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $(\frac{\alpha}{3})^3 + (\frac{\beta}{2})^2<0$ β) Το $P(\chi)$ έχει μια διπλή και μια απλή ρίζα στο $\mathbb{R}$ ανν $(\frac{\alpha}{3})^3 + (\frac{\beta}{2})^2=0$ γ) Το $P(\chi)$ έχει μια πραγματική και δυο μιγαδικές ρίζες αν και μόνο αν $(\frac{\alpha}{3})^3 + (\frac{\beta}{2})^2>0$.

4. Εξισώσεις τετάρτου βαθμού

Στα 1540 ο Ιταλός μαθηματικός Zuanne de Tonnini da Coi πρότεινε στον Καρντάνο το παρακάτω πρόβλημα: «Να διαιρεθεί το 10 σε τρία μέρη που να βρίσκονται σε συνεχή αναλογία και το γινόμενο των δυο πρώτων να είναι ίσο με 6». Αν συμβολίσουμε με α,β,γ τα τρία μέρη, τότε θα έχουμε:

$\alpha+\beta+\gamma=10$, $\alpha\gamma=\beta^2$, $\alpha\beta=6$. Απαλείφοντας τα α,γ από τις εξισώσεις αυτές οδηγούμαστε στην εξίσωση τετάρτου βαθμού

$\beta^4+6\beta^2-60\beta+36=0$. Ο Καρντάνο δεν μπόρεσε να λύσει αυτή την εξίσωση, τα κατάφερε όμως ο μαθητής του Ludovico Ferrari, 1522-1565 ο οποίος μάλιστα έδωσε και μια γενική μέθοδο για την επίλυση της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης. Ο Καρντάνο είχε τη χαρά να συμπεριλάβει κι αυτή τη λύση στην Ars Magna το 1545. Αργότερα δόθηκαν κι άλλες λύσεις από διάφορους ερευνητές όπως ο Francois Viete, 1540-1603 και ο Καρτέσιος (Rene Descarte, 1596-1650). Θα παρουσιάσουμε τη λύση του Καρτέσιου (1637).

Η εξίσωση $\chi^4+\alpha_3\chi^3+\alpha_2\chi^2+\alpha_1\chi+\alpha_0=0$ με την αντικατάσταση

$X=\chi-\alpha_3/4$ μετατρέπεται στη μορφή $\chi^4+\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ (4.1) η οποία δεν περιέχει τριτοβάθμιο όρο. Έστω ότι

$$\chi^4+\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=(\chi^2+\kappa\chi+\lambda)(\chi^2-\kappa\chi+\mu) \quad (4.2)$$

Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τους αριθμούς κ,λ,μ. Αν πετύχουμε κάτι τέτοιο τότε προφανώς ο τύπος (4.2) θα μας δίνει τις λύσεις της (4.1) μέσω των λύσεων δυο δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος της προηγούμενης ισότητας και εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων έχουμε:

$$\begin{cases} \mu-\kappa^2\lambda=\alpha \\ \kappa(\mu-\lambda)=\beta \\ \lambda\mu=\gamma \end{cases} \quad (4.3)$$

Από τις δυο πρώτες εξισώσεις βρίσκουμε $\begin{cases} 2\mu = \kappa^2 + \alpha + \dfrac{\beta}{\kappa} \\ 2\lambda = \kappa^2 + \alpha - \dfrac{\beta}{\kappa} \end{cases}$ (4.4)

Αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση του (4.3) έχουμε

$$\lambda\mu = \gamma \Leftrightarrow 4\lambda\mu = 4\gamma \Leftrightarrow (\kappa^2 + \alpha + \frac{\beta}{\kappa})(\kappa^2 + \alpha + \frac{\beta}{\kappa}) = 4\gamma \Leftrightarrow$$

$$(\kappa^3 + \alpha\kappa + \beta)(\kappa^3 + \alpha\kappa - \beta) = 4\gamma\kappa^2 \Leftrightarrow (\kappa^3 + \alpha\kappa)^2 - \beta^2 = 4\gamma\kappa^2 \Leftrightarrow$$

$$\kappa^6 + 2\alpha\kappa^4 + (\alpha^2 - 4\gamma)\kappa^2 - \beta^2 = 0 \quad (4.5)$$

Η εξίσωση (4.5) είναι κυβική ως προς κ^2 (συχνά η (4.5) αναφέρεται ως κυβική επιλύουσα της (4.1)) και λύνεται με τη βοήθεια του τύπου (3.6). Στη συνέχεια από τους τύπους (4.4) βρίσκουμε τους λ,μ και από την (4.2) υπολογίζουμε τις λύσεις της (4.1) λύνοντας δυο δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

<u>παράδειγμα:</u> Να λυθεί η εξίσωση χ^4-2χ^2+8χ-3=0

Η επιλύουσα (4.5) έχει τη μορφή

$$\kappa^6 + 2\alpha\kappa^4 + (\alpha^2 - 4\gamma)\kappa^2 - \beta^2 = 0$$

οπότε έχουμε $\kappa^6-4\kappa^4+16\kappa^2-64=0 \Leftrightarrow (\kappa^2-2^2)^3=0 \Leftrightarrow \kappa=2$ ή $\kappa=-2$. Αν κ=2 βρίσκουμε από τις (4.4) λ=-1 , μ=3 (ενώ αν κ=-2 , λ=3, μ=-1) θα έχουμε λοιπόν $\chi^4-2\chi^2+8\chi-3=0 \Leftrightarrow (\chi^2+2\chi-1)(\chi^2-2\chi+3)=0$ και τελικά $\chi_1 = -1+\sqrt{2}, \quad \chi_2 = -1-\sqrt{2}, \quad \chi_3 = 1-i\sqrt{2}, \quad \chi_4 = 1+i\sqrt{2}$.

<u>Άσκηση:</u> Λύστε την εξίσωση χ^4+6χ^2+36=60χ στην οποία οδηγεί το πρόβλημα που έθεσε ο Ντα Κόι στον Καρντάνο το 1540.

5. Επίλυση με ριζικά – Η ομάδα Galois

Μετά την επιτυχία στη λύση των τριτοβάθμιων και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων όπως ήταν φυσικό η έρευνα στράφηκε στις εξισώσεις πέμπτου ή ανωτέρου βαθμού. Αναζητήθηκαν τύποι που να δίνουν τις λύσεις και τέτοιων εξισώσεων. Η γενική απαίτηση για τους τύπους αυτούς ήταν να εκφράζουν τις λύσεις των εξισώσεων μέσω των εξαγωγών ν-οστών ριζών και πράξεων ανάμεσα στους αριθμούς που προκύπτουν, συναρτήσει βεβαίως των συντελεστών των αντίστοιχων εξισώσεων. Όλοι οι τύποι που δίνουν τις λύσεις εξισώσεων $1^{ου}$,$2^{ου}$,$3^{ου}$, και $4^{ου}$ βαθμού, είναι ακριβώς τέτοιας μορφής. Η απαίτηση αυτή για τη λύση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης, έμεινε στην μαθηματική ορολογία ως **μέθοδος επίλυσης με ριζικά.** Έτσι όταν λέμε ότι μια εξίσωση είναι επιλύσιμη, εννοούμε ότι είναι επιλύσιμη με ριζικά.

Ο Euler το 1750 προσπάθησε να αναγάγει την πεμπτοβάθμια εξίσωση στη λύση μιας εξίσωσης τετάρτου βαθμού. Η προσπάθειά του όμως απέτυχε, όπως απέτυχε και η προσπάθεια του Lagrange περίπου τριάντα χρόνια μετά. Ένας Ιταλός γιατρός, ο Πάολο Ρουφίνι (Paolo Ruffini, 1765-1822) έδωσε μια μη ολοκληρωμένη απόδειξη του γεγονότος ότι η **γενική εξίσωση πέμπτου βαθμού δεν μπορεί να επιλυθεί με ριζικά**. Μια ανεξάρτητη απόδειξη (επίσης ελλιπή) του ίδιου γεγονότος δόθηκε και από το διάσημο Νορβηγό μαθηματικό Νιλς Χέντρικ Άμπελ (Niels Henrik Abel 1802-1829). Λίγο αργότερα ο Γάλλος μαθηματικός Εβαρίστ Γκαλουά (Evarist Galois, 1811-1832) που σκοτώθηκε σε μια μονομαχία με πιστόλια σε ηλικία 21 ετών, άφησε μετά το θάνατό του μια επιστολή με τη μορφή επιστημονικής διαθήκης, η οποία, όταν τελικά ερμηνεύτηκε, αποδείχτηκε ότι μεταξύ των άλλων προσέφερε κριτήρια για τη δυνατότητα επίλυσης μιας αλγεβρικής εξίσωσης με ριζικά.

Στη συνέχεια θα σκιαγραφήσουμε τα κύρια σημεία της θεωρίας Galois. Κεντρική θέση στην θεωρία αυτή έχει η έννοια της ομάδας που ήδη συναντήσαμε στην τρίτη παράγραφο της παρούσας εργασίας. Ουσιαστικά η έννοια της αλγεβρικής επιλυσιμότητας μιας εξίσωσης ανάγεται σε σχέσεις και ιδιότητες που έχει μια ομάδα αποκαλούμενη ομάδα Galois της εξίσωσης, και οι υποομάδες αυτής.

Ποιο συγκεκριμένα έστω $P(\chi)=\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\chi+\alpha_0=0$ μια τυχαία εξίσωση βαθμού ν, με τους συντελεστές $\alpha_i \in \mathbb{F}$.(Για απλότητα ας υποθέσουμε ότι $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$. Ήδη από τον 18^{o} αιώνα ο Karl Friedrich Gauss είχε αποδείξει ότι μια πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν, έχει ν ακριβώς μιγαδικές ρίζες $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$. Θα θέλαμε να μάθουμε αν υπάρχουν τύποι που εκφράζουν τις λύσεις $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$ συναρτήσει των συντελεστών $\alpha_0,\ldots,\alpha_\nu$ με τη χρήση ριζικών και των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων. Αν στο αρχικό σώμα $\mathbb{F}$ όπου ανήκουν οι συντελεστές επισυνάψουμε τις ρίζες της εξίσωσης $P(\chi)=0$ και διευρύνουμε την εκτέλεση των πράξεων ανάμεσα στα στοιχεία του νέου αυτού συνόλου προκύπτει ένα σώμα που περιέχει το $\mathbb{F}$, συμβολίζεται με $\mathbb{F}(P)= \mathbb{F}(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu)$ και γενικά είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Το μικρότερο δυνατό σώμα που ικανοποιεί τις παραπάνω απαιτήσεις το ονομάζουμε **σώμα ριζών (ή σώμα διάσπασης) του πολυωνύμου** $P(\chi)$. Το σώμα $\mathbb{F}(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu)$ έχει για στοιχεία εκφράσεις της μορφής $\Phi(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu)$ όπου Φ πολυώνυμο με ν μεταβλητές και συντελεστές από το σώμα $\mathbb{F}$.

<u>παράδειγμα:</u> Το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^2-2$ του $\mathbb{Q}[\chi]$ δεν έχει ρητές ρίζες. Οι ρίζες του είναι οι άρρητοι αριθμοί $\pm\sqrt{2}$. Έτσι το σώμα ριζών του είναι το $E=\mathbb{Q}(\pm\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Τα στοιχεία αυτού του σώματος είναι της μορφής $\Phi(\sqrt{2})$ με $\Phi(\chi)$ τυχαίο πολυώνυμο του $\mathbb{Q}[\chi]$. Διαιρώντας όμως το $\Phi(\chi)$ με το $P(\chi)$ βρίσκουμε ότι:

$\Phi(\chi)=(\chi^2-2)\Pi(\chi)+\alpha+\beta\chi$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$. Έτσι $\Phi(\sqrt{2})=\alpha+\beta\sqrt{2}$. Συνεπώς το σώμα ριζών του θα είναι το $E=\{ \alpha+\beta\sqrt{2} \ / \ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ισομορφισμούς από το $\mathbb{F}(\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_\nu)$ στον εαυτό του, δηλαδή απεικονίσεις σ: $\mathbb{F}(\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_\nu) \to \mathbb{F}(\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_\nu)$ που διατηρούν το άθροισμα και το γινόμενο : σ(α+β)=σ(α)+σ(β), σ(αβ)=σ(α)σ(β) με την επιπλέον συνθήκη να αφήνουν σημειακά σταθερό το σώμα $\mathbb{F}$ (δηλαδή σ(α)=α για κάθε $\alpha\in\mathbb{F}$).

Αν ρ είναι μια ρίζα της εξίσωσης P(χ)=0 τότε θα έχουμε τη σχέση $\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\dots+\alpha_1\rho+\alpha_0=0$. Εφαρμόζοντας τον ισομορφισμό σ λαμβάνουμε $\sigma(\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\dots+\alpha_1\rho+\alpha_0)=\sigma(0)$ άρα

$\sigma(\alpha_\nu\rho^\nu)+\sigma(\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1})+\dots+\sigma(\alpha_1\rho)+\sigma(\alpha_0)=0 \Leftrightarrow$

$\sigma(\alpha_\nu)\sigma(\rho^\nu)+\sigma(\alpha_{\nu-1})\sigma(\rho^{\nu-1})+\dots+\sigma(\alpha_1)\sigma(\rho)+\sigma(\alpha_0)=0\Leftrightarrow$

$\alpha_\nu\sigma(\rho)^\nu+\alpha_{\nu-1}\sigma(\rho)^{\nu-1}+\dots+\alpha_1\sigma(\rho)+\alpha_0=0$ δηλαδή η τιμή σ(ρ) είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης P(χ)=0. Αυτό σημαίνει ότι ο ισομορφισμός σ ορίζει μια μετάθεση των ριζών $\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_\nu$. Το σύνολο όλων αυτών των ισομορφισμών συγκροτεί μια ομάδα που περιέχεται μέσα στην ομάδα μεταθέσεων Sν. Την ομάδα αυτή την ονομάζουμε **ομάδα Galois του πολυωνύμου** P(χ) και τη συμβολίζουμε με G(P). O Galois το 1832 σε ηλικία μόλις 20 ετών στη θεμελιώδη μαθηματική πραγματεία του, έδειξε ότι κάποια ιδιότητα της G(P) μπορεί να μας δώσει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για το πότε η εξίσωση P(χ)=0 επιλύεται με ριζικά.

Θα δούμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού της ομάδας Galois.

1) Η εξίσωση $\chi^4-5\chi^2+6=0$ με παραγοντοποίηση παίρνει τη μορφή $(\chi^2-2)(\chi^2-3)=0$. Οι ρίζες της είναι οι αριθμοί $-\sqrt{2},+\sqrt{2},-\sqrt{3},+\sqrt{3}$. Επομένως το σώμα ριζών της εξίσωσης είναι το $E=\mathbb{Q}(-\sqrt{2},+\sqrt{2},-\sqrt{3},+\sqrt{3})$ το οποίο προφανώς ταυτίζεται με το $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι τα στοιχεία του Ε είναι της μορφής $a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6}$ με $\alpha_i\in\mathbb{Q}$. Αν θέλουμε να ορίσουμε έναν $\mathbb{Q}$-αυτομορφισμό του Ε αρκεί να ορίσουμε την τιμή του πάνω στα στοιχεία $\sqrt{2},\sqrt{3}$. Έτσι βρίσκουμε ότι αν $\alpha=a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6}$ η ομάδα Γκαλουά

της εξίσωσης αποτελείται από τους εξής αυτομορφισμούς:

$$1(\alpha) = a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6}$$

$$\tau(\alpha) = a_1 + a_2\sqrt{2} - a_3\sqrt{3} - a_4\sqrt{6}$$

$$\sigma(\alpha) = a_1 - a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} - a_4\sqrt{6}$$

$$\tau\sigma(\alpha) = a_1 - a_2\sqrt{2} - a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6}$$

2) Έστω η εξίσωση έκτου βαθμού $f(\chi)=(\chi^2-\chi+1)^3-\alpha(\chi^2-\chi)^2=0$. Κατ' αρχή την γράφουμε με δυο διαφορετικούς τρόπους

$$(\chi + \frac{1}{\chi} - 1)^3 - \alpha(\chi + \frac{1}{\chi} - 2) = 0 \qquad (\alpha)$$

$$[\chi(1-\chi)+1]^3 - \alpha[\chi(1-\chi)]^2 = 0 \qquad (\beta)$$

Από την (α) βλέπουμε πως αν το χ είναι ρίζα της εξίσωσης το ίδιο ισχύει και για την 1/χ. Η (β) μας δείχνει ότι ρίζα είναι επίσης και η 1-χ. Αν συμβολίσουμε με θ μια ρίζα της εξίσωσης, τότε οι 1/θ, 1-θ, 1/(1-θ), (θ-1)/θ, θ/(θ-1) είναι επίσης ρίζες της. Μπορούμε να επιλέξουμε τον αριθμό α ώστε όλες οι παραπάνω λύσεις να είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Το σώμα ριζών του πολυωνύμου f(x) είναι το $E=\mathbb{Q}(\alpha,\theta,1/\theta,1-\theta,1/(1-\theta),(\theta-1)/\theta,\theta/(\theta-1))$. Η Ομάδα Galois G(f) του f(x) αποτελείται από τους αυτομορφισμούς του Ε που αφήνουν σημειακά αναλλοίωτο το σώμα $\mathbb{Q}(\alpha)$. Επειδή ο περιορισμός ενός τέτοιου αυτομορφισμού πάνω στο σύνολο $A=\{\theta,1/\theta,1-\theta,1/(1-\theta),(\theta-1)/\theta,\theta/(\theta-1)\}$ των ριζών του πολυωνύμου f(x) αποτελεί ,όπως αναφέραμε και παραπάνω, μια μετάθεση του Α, ουσιαστικά αυτός καθορίζεται από την τιμή του πάνω στα στοιχεία του Α. Αν $\sigma\in G(f)$ η τιμή σ(θ) καθορίζει πλήρως τον σ και υπάρχουν ακριβώς έξι διαφορετικοί τρόποι να οριστεί το σ(θ). Συγκεκριμένα θα είναι σ(θ)=θ ή 1/θ ή 1-θ ή 1/(1-θ) ή (θ-1)/θ ή θ/(θ-1). Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι $G(f)=S_3$. Όπως βλέπουμε η συγκεκριμένη ομάδα Galois, είναι γνήσια υποομάδα της S_6. Το αξιοσημείωτο εδώ είναι πως ενώ δεν γνωρίζουμε τις ρίζες του f(x) , η ομάδα Γκαλουά μας είναι απολύτως γνωστή.

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη που βρήκε ο Galois για να είναι μια πολυωνυμική εξίσωση επιλύσιμη με ριζικά, είναι η συνθήκη η αντίστοιχη ομάδα Galois να είναι επιλύσιμη. **Τώρα λέμε πως μια ομάδα G είναι επιλύσιμη αν υπάρχει μια ακολουθία υποομάδων της τέτοια ώστε $G>G_1>G_2>\ldots>G_r=\{I\}$, όπου {I} η τετριμμένη υποομάδα της G που αποτελείται μόνο από το ουδέτερο στοιχείο, και στην οποία ακολουθία κάθε ομάδα είναι κανονική υποομάδα της προηγούμενης με δείκτη πρώτο αριθμό.**

Έτσι η ομάδα Γκαλουά της εξίσωσης του δεύτερου παραδείγματος είναι η S_3 και όπως έχουμε ξαναδεί όταν λύναμε την τριτοβάθμια εξίσωση, αυτή είναι επιλύσιμη αφού υπάρχει η υποομάδα της A_3 και ισχύουν οι συνθήκες $\{I\}\lhd A_3 \lhd S_3$ και $[A_3:\{I\}]=3$ $[S_3:A_3]=2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως οι λύσεις της εξίσωσης $(\chi^2-\chi+1)^3-\alpha(\chi^2-\chi)^2=0$ μπορούν να εκφραστούν με ριζικά.

6. Επιλυσιμότητα ομάδων και επιλυσιμότητα με ριζικά

Όπως είδαμε στην 5η παράγραφο, μια εξίσωση επιλύεται με ριζικά αν και μόνο αν η ομάδα Galois της εξίσωσης είναι επιλύσιμη. Επειδή τώρα οι ομάδες Galois είναι υποομάδες των ομάδων μεταθέσεων S_n το εύλογο ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο οι συμμετρικές ομάδες S_n είναι επιλύσιμες. Η Ομάδα S_2 αποτελείται από τις μεταθέσεις $\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ *και* $\sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ και είναι προφανώς επιλύσιμη αφού $I \lhd S_2$. Το γεγονός ότι $[S_2:I]=2$ σημαίνει πως η δευτεροβάθμια εξίσωση λύνεται γενικά με χρήση τετραγωνικής ρίζας. Είδαμε επίσης στα προηγούμενα ότι και η ομάδα S_3 επιλύσιμη αφού $\{I\}\lhd A_3 \lhd S_3$ και $[A_3:\{I\}]=3$ $[S_3:A_3]=2$. Αυτό σημαίνει πως η τριτοβάθμια εξίσωση λύνεται γενικά με χρήση τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Στην τέταρτη παράγραφο δείξαμε ότι και η τεταρτοβάθμια εξίσωση λύνεται με ριζικά. Ας δούμε τώρα το ίδιο πρόβλημα με έναν διαφορετικό τρόπο, μελετώντας την ομάδα S_4. Η ομάδα αυτή περιέχει τις 4!=24 μεταθέσεις του συνόλου $I_4=\{1,2,3,4\}$. Αν σ είναι μια τέτοια μετάθεση τότε αυτή μπορεί να παρασταθεί όπως είδαμε με τον πίνακα

σ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}$. Ορίζουμε ως πρόσημο ε(σ) της μετάθεσης τον αριθμό ε(σ)=$\prod_{i<j} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)}$ (6.1). Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τις μεταθέσεις $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ τότε θα έχουμε ε(σ) = $\frac{1-2}{4-3} \cdot \frac{1-3}{4-2} \cdot \frac{1-4}{4-1} \cdot \frac{2-3}{3-2} \cdot \frac{2-4}{3-1} \cdot \frac{3-4}{2-1} = +1$ ενώ ε(τ)= $\frac{1-2}{4-1} \cdot \frac{1-3}{4-2} \cdot \frac{1-4}{4-3} \cdot \frac{2-3}{1-2} \cdot \frac{2-4}{1-3} \cdot \frac{3-4}{2-3} = -1$. Δεδομένου ότι τα σ(i) και σ(j) δεν είναι παρά κάποια από τα στοιχεία του I_4 γραμμένα με διαφορετική σειρά είναι σχεδόν φανερό ότι για τυχούσα μετάθεση σ θα είναι ε(σ)=±1. Τις μεταθέσεις που έχουν πρόσημο +1 τις ονομάζουμε άρτιες μεταθέσεις, ενώ τις μεταθέσεις με πρόσημο -1 τις ονομάζουμε περιττές μεταθέσεις. Επειδή για μια μετάθεση σ μπορούμε να γράψουμε $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \tau(4) \\ \sigma\tau(1) & \sigma\tau(2) & \sigma\tau(3) & \sigma\tau(4) \end{pmatrix}$

θα έχουμε

$$\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = \prod_{i<j} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)} \prod_{i<j} \frac{i-j}{\tau(i)-\tau(j)} =$$

$$\prod_{i<j} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{\sigma\tau(i)-\sigma\tau(j)} \prod_{i<j} \frac{i-j}{\tau(i)-\tau(j)} = \prod_{i<j} \frac{i-j}{\sigma\tau(i)-\sigma\tau(j)} = \varepsilon(\sigma\tau)$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι ε(στ)=ε(σ)ε(τ) (6.2). Επειδή η ταυτοτική μετάθεση είναι προφανώς άρτια από τον τύπο (6.2) θα έχουμε +1=ε(Ι)=ε($\sigma\sigma^{-1}$)=ε(σ)ε(σ^{-1}) πράγμα που σημαίνει ότι η αντίστροφη μιας άρτιας μετάθεσης είναι επίσης άρτια και η αντίστροφη μιας περιττής μετάθεσης είναι επίσης περιττή. Αν συμβολίσουμε με A_n το σύνολο των άρτιων μεταθέσεων και με Π_n το σύνολο των περιττών μεταθέσεων τότε $S_n = A_n \cup \Pi_n$. (Αν και μιλούσαμε για την S_4 ,τα παραπάνω ισχύουν για κάθε ομάδα S_n.) Αφού το γινόμενο δυο άρτιων είναι επίσης άρτια μετάθεση, και η αντίστροφη μιας άρτιας είναι επίσης άρτια είναι φανερό πως το **σύνολο A_n των άρτιων μεταθέσεων αποτελεί υποομάδα της S_n.**

Μπορούμε να αποδείξουμε τώρα ότι οι **άρτιες μεταθέσεις είναι όσες και οι περιττές**.

Πράγματι ,αν ρ είναι μια συγκεκριμένη περιττή μετάθεση και η σ διατρέχει τις άρτιες μεταθέσεις, η ρσ διατρέχει τις περιττές μεταθέσεις. Είναι $\rho\sigma_1 \neq \rho\sigma_2$ όταν $\sigma_1 \neq \sigma_2$ γιατί αν $\rho\sigma_1 = \rho\sigma_2$ πολλαπλασιάζοντας τα δυο μέλη της ισότητας με ρ^{-1} προκύπτει

$\rho^{-1}(\rho\sigma_1) = \rho^{-1}(\rho\sigma_2) \Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2$. Επίσης αν π είναι τυχούσα περιττή μετάθεση, τότε αυτή γράφεται στη μορφή $\pi = \rho(\rho^{-1}\pi)$ και η $\rho^{-1}\pi$ είναι άρτια αφού $\varepsilon(\rho^{-1}\pi) = \varepsilon(\rho^{-1})\varepsilon(\pi) = (-1)(-1) = +1$. Τα προηγούμενα λοιπόν δείχνουν ότι η απεικόνιση $f : A_n \to \Pi_n$ είναι ένα προς ένα και επί. Άρα το πλήθος των άρτιων μεταθέσεων θα είναι ίσο με το πλήθος των περιττών μεταθέσεων και μάλιστα ισχύει $|A_n| = n!/2$.

Ανακεφαλαιώνοντας, είδαμε ότι η ομάδα A_n των άρτιων μεταθέσεων είναι πάντοτε υποομάδα της συμμετρικής ομάδας S_n. Ο δείκτης της A_n στην S_n είναι $[S_n : A_n] = \dfrac{n!}{\frac{n!}{2}} = 2$. Αποδεικνύεται ότι η A_n είναι κανονική υποομάδα της S_n.

Ώστε για κάθε φυσικό $n \geq 2$ ισχύει $I \lhd A_n \lhd S_n$, $[S_n : A_n] = 2$. (6.3)

Ας είναι α,β,γ,…,ω $r \leq n$ στοιχεία του συνόλου $I_n = \{1,2,3,\dots,n\}$. Τότε (α β γ ..ω) θα συμβολίζει τη μετάθεση που απεικονίζει $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$, …, $\omega \to \alpha$ και κάθε άλλο στοιχείο του I_n στον εαυτό του. Η μετάθεση (α,β,γ,…,ω) θα καλείται **κύκλος** μήκους r ή απλά r-κύκλος. Ειδικότερα ένας 2-κύκλος θα λέγεται **αντιμετάθεση** ή μετάβαση.

παράδειγμα: Η μετάθεση $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3\quad 4)$ είναι ένας 4-κύκλος. Το στοιχείο $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 4)$ είναι ένας 3-κύκλος. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ένας ν-κύκλος είναι ένα στοιχείο της ομάδας μεταθέσεων με **τάξη** ν, δηλαδή $\sigma^{\nu}=I$. Έτσι για τους σ, τ θα έχουμε $\sigma^4=I$ και $\tau^3=I$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι **κάθε μετάθεση σ, μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο αντιμεταθέσεων**. Αν και η ανάλυση αυτή δεν είναι μοναδική το πλήθος των αντιμεταθέσεων στις οποίες μπορεί να αναλυθεί μια άρτια μετάθεση είναι πάντα άρτιος αριθμός, ενώ το πλήθος των αντιμεταθέσεων στις οποίες μπορεί να αναλυθεί μια περιττή μετάθεση είναι πάντοτε περιττός αριθμός. Έτσι πχ θα έχουμε

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=(1\quad 2)(1\quad 3)(1\quad 4)(2\quad 3)=(1\quad 3)(1\quad 4)$ και η σ είναι σίγουρα άρτια μετάθεση. Είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο K={I,(1 2)(3 4),(1 3)(2 4),(1 4)(2 3)} είναι μια κανονική υποομάδα του A_4. (Ομάδα τεσσάρων στοιχείων του Klein). Προφανώς και το σύνολο H={I,(1 2)(3 4)} αποτελεί κανονική υποομάδα της K. Για την ομάδα S_4 συνεπώς παρατηρούμε ότι υπάρχει η εξής σειρά κανονικών υποομάδων της:

$S_4 \lhd K \lhd H \lhd I$ και $[S_4:K]=2$, $[K:H]=12:4=3$, $[H:I]=2$. (6.4)

Άρα η ομάδα S_4 είναι επιλύσιμη και επομένως η γενική εξίσωση τετάρτου βαθμού είναι επιλύσιμη με ριζικά. Ας δούμε τώρα πώς οι σχέσεις (6.4) μπορούν να μας οδηγήσουν στη λύση της εξίσωσης $\chi^4+\alpha_1\chi^3+\alpha_2\chi^2+\alpha_3\chi+\alpha_4=0$ με $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in F$ (6.5)

Αν χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 είναι οι ρίζες της (6.5) μέσα σε ένα σώμα διάσπασής της E, από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\chi_1+\chi_2+\chi_3+\chi_4=-\alpha_1\\
&\chi_1\chi_2+\chi_1\chi_3+\chi_1\chi_4+\chi_2\chi_3+\chi_2\chi_4+\chi_3\chi_4=\alpha_2\\
&\chi_1\chi_2\chi_3+\chi_1\chi_3\chi_4+\chi_1\chi_2\chi_4+\chi_2\chi_3\chi_4=-\alpha_3\\
&\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4=\alpha_4
\end{aligned} \qquad (6.6)$$

Αν G είναι μια ομάδα θα συμβολίζουμε με [G] το σύνολο όλων των αλγεβρικών παραστάσεων $P(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$ που μένουν αναλλοίωτες όταν δράσουν πάνω τους τα στοιχεία της ομάδας G. (παραστάσεις συμμετρικές ως προς την G). Είναι φανερό ότι $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \in[I]$. Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τα $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ συναρτήσει στοιχείων του [H]. Η συνθήκη $I \triangleleft H$ και $[H:I]=2$ μας βεβαιώνει ότι αυτό είναι πάντοτε εφικτό στη χειρότερη περίπτωση με χρήση τετραγωνικών ριζών. Από τις παραστάσεις

$$\chi_1+\chi_2-\chi_3-\chi_4=\beta_1$$
$$\chi_1-\chi_2+\chi_3-\chi_4=\beta_2$$
$$\chi_1-\chi_2-\chi_3+\chi_4=\beta_3$$

μόνο η β_1 ανήκει στο [H] όμως τα τετράγωνά τους προφανώς ανήκουν στο [H]. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned}\chi_1+\chi_2-\chi_3-\chi_4&=\beta_1\\ \chi_1-\chi_2+\chi_3-\chi_4&=\beta_2\\ \chi_1-\chi_2-\chi_3+\chi_4&=\beta_3\\ \chi_1+\chi_2+\chi_3+\chi_4&=-a_1\end{aligned} \qquad (6.7)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεών του προκύπτει $\chi_1=\frac{1}{4}(\beta_1+\beta_2+\beta_3-\alpha_1)=\frac{1}{4}(\sqrt{\beta_1^{\,2}}+\sqrt{\beta_2^{\,2}}+\sqrt{\beta_3^{\,2}}-\alpha_1) \qquad (6.8)$.

Όπως βλέπουμε το χ_1 και παρόμοια και οι υπόλοιπες ρίζες εκφράζονται όντως από τα στοιχεία του [H] με χρήση τετραγωνικών ριζών. Το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε τα στοιχεία του [H] από τα στοιχεία του K. Υπολογίζοντας τα $\beta_1^2,\beta_2^2,\beta_3^2$ με βάση τους τύπους (6.6) και (6.7) βρίσκουμε:

$$\beta_1^2=\alpha_1^2-4\,\alpha_2+4\,\eta_1 \ , \text{όπου } \eta_1=\chi_1\chi_2+\chi_3\chi_4$$
$$\beta_2^2=\alpha_1^2-4\,\alpha_2+4\,\eta_2 \ , \text{όπου } \eta_2=\chi_1\chi_3+\chi_2\chi_4$$
$$\beta_3^2=\alpha_1^2-4\,\alpha_2+4\,\eta_3 \ , \text{όπου } \eta_3=\chi_1\chi_4+\chi_3\chi_2 \qquad (6.8)$$

Δεδομένου τώρα ότι οι παραστάσεις η_1,η_2,η_3 ανήκουν στο [K] βρίσκουμε πχ ότι

$$\chi_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{\alpha_1{}^2 - 4\alpha_2 + 4\eta_1} + \sqrt{\alpha_1{}^2 - 4\alpha_2 + 4\eta_2} + \sqrt{\alpha_1{}^2 - 4\alpha_2 + 4\eta_3} - \alpha_1)$$

Πρέπει στη συνέχεια να εκφράσουμε τα η_1,η_2,η_3 συναρτήσει στοιχείων του $[A_4]$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = \alpha_2 \\ \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3 = \alpha_1\alpha_3 - 4\alpha_4 \\ \eta_1\eta_2\eta_3 = \alpha_4\alpha_1{}^2 + \alpha_3{}^2 - 4\alpha_4\alpha_2 \end{cases}$$

Επομένως οι αριθμοί η_1,η_2,η_3 μπορούν να υπολογιστούν ως ρίζες της κυβικής εξίσωσης

$$\psi^3 - \alpha_2\psi^2 + (\alpha_1\alpha_3 - 4\alpha_4)\psi - (\alpha_4\alpha_1{}^2 + \alpha_3{}^2 - 4\alpha_4\alpha_2) = 0 \quad (6.9)$$

Ακολουθώντας τα βήματα που περιγράψαμε στην παράγραφο 3 διαπιστώνουμε τελικά ότι τα η_1,η_2,η_3 εκφράζονται τελικά από τα στοιχεία του $[S_4]$ συναρτήσει των $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ και χρήση κυβικών και τετραγωνικών ριζών όπως υποδεικνύουν και οι συνθήκες των δεικτών $[A_4{:}K]=3$, $[S_4{:}A_4]=2$.

Μέχρι στιγμής δείξαμε ότι οι ομάδες S_2,S_3,S_4 είναι επιλύσιμες. Δυστυχώς όμως εδώ σταματούν οι δυνατότητες μας. Αποδεικνύεται ότι **οι ομάδες S_n , n≥5 δεν είναι επιλύσιμες.** Το αποτέλεσμα αυτό στη θεωρία εξισώσεων σημαίνει ότι γενικά **οι εξισώσεις με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του πέντε, δεν μπορούν να επιλυθούν με ριζικά.** Προσέξτε. Αυτό δε σημαίνει ότι όλες οι ανωτέρου του πέμπτου βαθμού εξισώσεις δεν επιλύονται με ριζικά. Ενδεχομένως μια εξίσωση να έχει ομάδα Galois κάποια υποομάδα της S_n η οποία να είναι επιλύσιμη. Θυμηθείτε την εξίσωση έκτου βαθμού που μελετήσαμε στο παράδειγμα 2 της παραγράφου 5. Αυτό που ισχυρίζεται η παραπάνω πρόταση είναι ότι δεν μπορεί να βρεθεί ένας γενικός τύπος (όπως για παράδειγμα ο τύπος λύσεων της δευτεροβάθμιας ή της τριτοβάθμιας εξίσωσης) που να δίνει τις λύσεις μιας εξίσωσης με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του πέντε, σε κάθε περίπτωση.

Αν επιθυμούμε να δώσουμε μια απόδειξη για τη μη επιλυσιμότητα της S_n , n≥5 θα πρέπει να δούμε κάποια επιπλέον στοιχεία από τη θεωρία των ομάδων. Αν G είναι μια ομάδα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ν, ο αριθμός ν καλείται **τάξη της ομάδας** και συμβολίζεται |G|=ν ή και [G:1]=ν. Αν $\alpha \in G$, τότε οι δυνάμεις $\alpha^0,\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^\nu,\alpha^{\nu+1},\ldots$δεν μπορεί να είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους όταν η ομάδα έχει τάξη ν. Έτσι θα υπάρχουν στοιχεία κ,μ με κ<μ έτσι ώστε $\alpha^\mu=\alpha^\kappa$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα επί α^{-1} , κ φορές διαδοχικά, βρίσκουμε ότι $\alpha^{\mu-\kappa}=I$, όπου I το ουδέτερο στοιχείο της G. Δηλαδή υπάρχει φυσικός $n \geq 1$ ώστε $\alpha^n=I$. Τον ελάχιστο τέτοιο φυσικό αριθμό n τον ονομάζουμε **τάξη του στοιχείου α.** Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός (προφανώς αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν η ομάδα έχει άπειρο πλήθος στοιχείων) τότε λέμε ότι το στοιχείο α είναι μηδενικής τάξης. Εμείς στα παρακάτω όταν λέμε ομάδα θα εννοούμε πεπερασμένη ομάδα.

Αν α είναι στοιχείο μιας ομάδας G τότε το σύνολο $\{\alpha^\kappa / \kappa=0,1,2,3,\ldots\}$ που αποτελείται από τις δυνάμεις του α, αποτελεί μια υποομάδα της G. Αυτήν την ομάδα την λέμε **κυκλική** παραγόμενη από το στοιχείο α και τη συμβολίζουμε ως (α). Δηλαδή είναι $(\alpha)= \{\alpha^\kappa / \kappa=0,1,2,3,\ldots\}$. Είναι φανερό ότι η τάξη της (α) ισούται με την τάξη του στοιχείου α. Αν και η G μπορεί να μην είναι αντιμεταθετική ομάδα, προφανώς κάθε κυκλική ομάδα είναι πάντοτε αντιμεταθετική.

Έστω H μια υποομάδα της ομάδας G. Μέσα στην G μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας ~ ως εξής:

$\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \alpha^{-1}\beta \in H \Leftrightarrow \beta \in \alpha H$ (όπου $\alpha H=\{\alpha\cdot\eta , \text{ με } \eta \in H\}$). Η σχέση αυτή είναι όντως σχέση ισοδυναμίας στο G δηλαδή είναι ανακλαστική (α~α), συμμετρική ($\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \beta\sim\alpha$) και μεταβατική ($\alpha\sim\beta$ & $\beta\sim\gamma \Rightarrow \alpha\sim\gamma$). Η βασική λειτουργία μιας σχέσης ισοδυναμίας στο G είναι ότι διαμερίζει το σύνολο αυτό σε υποσύνολα που τα λέμε κλάσεις ισοδυναμίας, τα οποία είναι ανά δυο ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους ισούται με G. Αν συμβολίσουμε με $<\alpha>$ την κλάση ισοδυναμίας του α, δηλαδή το σύνολο όλων των στοιχείων της γ που είναι ισοδύναμα με το α, είναι φανερό ότι $<\alpha>=\alpha H$. Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας καλείται

σύνολο πηλίκο της σχέσης και θα το συμβολίζουμε με G/H. Τα στοιχεία του G/H τα ονομάζουμε και **αριστερές κλάσεις** της H στη G.

Έχουμε λοιπόν G/H={αH / α∈G}

$$G = \bigcup_{<a>\in G/H} <a>$$

$$<a> \bigcap <b> = \emptyset \quad για \quad κάθε \quad <a>, <b> \in G/H \quad <a> \neq <b>$$
(6.10)

Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι όλες οι αριστερές κλάσεις έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων με την υποομάδα H. (αφού η συνάρτηση f: H→αH με f(η)=α·η είναι ένα προς ένα και επί). Από τις σχέσεις (6.10) προκύπτει ότι $|G| = \sum_{a\in G/H} |<a>| = \sum_{a\in G/H} |H| = |G/H||H|$

Δηλαδή |G|=|G/H|·|H| (6.11) (θεώρημα Lagrange)

Από την (6.11) προκύπτει ότι |G/H|=|G|/|H| δηλαδή το πλήθος των αριστερών κλάσεων της H στη G είναι ακριβώς αυτό που είχαμε ονομάσει **δείκτη της H στη G**.

Ο τύπος (6.11) μας δείχνει επίσης ότι η τάξη μιας υποομάδας H της ομάδας G, διαιρεί την τάξη της ομάδας. Τώρα αφού η τάξη ενός στοιχείου α, ισούται με την τάξη της κυκλικής ομάδας (α) που παράγεται από το α, θα ισχύει ότι και η τάξη ενός στοιχείου πάντοτε διαιρεί την τάξη της ομάδας. Έτσι αν η τάξη του α είναι ν και η τάξη της ομάδας είναι μ θα έχουμε μ=ν·κ για κάποιον θετικό ακέραιο κ. Τότε όμως $α^{μ}=α^{ν\cdot κ}=(α^{ν})^{κ}=I^{κ}=I$. Δηλαδή κάθε στοιχείο μιας ομάδας, υψωμένο στην τάξη της ομάδας μας δίνει πάντοτε το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας.

Αν η τάξη μιας ομάδας G είναι ο πρώτος αριθμός ρ, τότε η ομάδα είναι κυκλική. Πράγματι αν ν είναι η τάξη ενός στοιχείου α της G διάφορου του ουδέτερου στοιχείου, τότε θα πρέπει το ν να διαιρεί τον ρ. Αφού όμως ο ρ είναι πρώτος, θα πρέπει ν=ρ. Αυτό όμως σημαίνει πως G=(α).

Αν A,B είναι δυο υποσύνολα της ομάδας G, το γινόμενό τους AB ορίζεται ως AB={αβ / α∈A και β∈B}. Βεβαίως πάντοτε AB⊂G.

Αν η ομάδα δεν είναι αντιμεταθετική τότε $AB \neq BA$. Αν τα Α,Β είναι υποομάδες της G το γινόμενο AB γενικά δεν είναι υποομάδα της.

Είχαμε δει ότι το σύνολο πηλίκο $G/H=\{\alpha H \,/\, \alpha \in G\}$. Κάθε κλάση αH είναι υποσύνολο της G κι έτσι μπορεί να οριστεί το γινόμενο μεταξύ δυο κλάσεων (αH)(βH). Αυτό το γινόμενο είναι μεν υποσύνολο της G, αλλά γενικά δεν είναι κάποια αριστερή πλευρική κλάση της G, δηλαδή γενικά δεν ανήκει στο G/H.

Παρατηρούμε όμως ότι αν ισχύει $\alpha H=H\alpha$ για κάθε $\alpha \in G$, τότε για το γινόμενο των κλάσεων θα έχουμε:

$(\alpha H)(\beta H)=\alpha(H\beta)H=\alpha(\beta H)H=(\alpha\beta H)H=\alpha\beta H$ δηλαδή το γινόμενο των κλάσεων αH, βH είναι επίσης η κλάση αβH με άλλα λόγια το G/H είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό κλάσεων. Το στοιχείο αυτό είναι ιδιαιτέρως σημαντικό διότι στην περίπτωση αυτή ο πολλαπλασιασμός των κλάσεων ικανοποιεί και τα υπόλοιπα αξιώματα του ορισμού μιας ομάδας, δηλαδή

είναι προσεταιριστικός $(\alpha H)[(\beta H)(\gamma H)]=[(\alpha H)(\beta H)](\gamma H)=\alpha\beta\gamma H$

υπάρχει ουδέτερο στοιχείο που είναι η κλάση H:
$(\alpha H)H=\alpha H=H(\alpha H)$

υπάρχει αντίστροφο στοιχείο: $(\alpha H)^{-1}=\alpha^{-1}H$.

Το ζήτημα είναι ότι δεν ισχύει πάντοτε η ισότητα $\alpha H=H\alpha$ για κάθε $\alpha \in G$. Στην περίπτωση που η συνθήκη αυτή ικανοποιείται η ομάδα H λέμε ότι είναι **κανονική (ή ορθόθετη) υποομάδα** της G και το γεγονός αυτό το συμβολίζουμε ως $H \lhd G$. (Συγκρίνετε τον ορισμό που δώσαμε εδώ για την κανονική υποομάδα με αυτόν που είχαμε δώσει στην παράγραφο 3 για να διαπιστώσετε την ισοδυναμία τους).

Συνοψίζοντας αν $H \lhd G$ τότε ορίζεται η ομάδα πηλίκο G/H με πράξη $(\alpha H)(\beta H)=\alpha\beta H$. Η τάξη αυτής της ομάδας λέγεται δείκτης της H στην G και συμβολίζεται [G/H] ή [G:H].

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το εξής

<u>Θεώρημα: Το γενικό πολυώνυμο ν-βαθμού με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{F}$ για ν≥5 δεν είναι επιλύσιμο με ριζικά.</u>

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο

Λήμμα: *Αν G είναι μια υποομάδα της S_ν με ν≥5, η οποία περιέχει όλους τους κύκλους μήκους τρία, και Η μια κανονική υποομάδα της G τέτοια ώστε η ομάδα πηλίκο G/H να είναι αντιμεταθετική, τότε η Η περιέχει επίσης όλους τους κύκλους των τριών στοιχείων.*

Απόδειξη: Ως γνωστό ο κύκλος σ των στοιχείων α,β,γ που συμβολίζεται με σ=(α β γ) , είναι η μετάθεση σ για την οποία σ(α)=β, σ(β)=γ, σ(γ)=α και σ(χ)=χ για κάθε χ διαφορετικό από τα α,β,γ. Θεωρούμε επίσης και τους κύκλους τ=(δ β α) , ρ=(α ε γ) όπου τα δ,ε είναι στοιχεία διαφορετικά μεταξύ τους καθώς και διαφορετικά από τα α,β,γ. Παρατηρούμε ότι

$\tau^{-1}\rho^{-1}\tau\rho=(\alpha\ \beta\ \delta)(\gamma\ \varepsilon\ \alpha)(\delta\ \beta\ \alpha)(\alpha\ \varepsilon\ \gamma)=(\alpha\ \beta\ \gamma)$

Επίσης $(\tau^{-1}H)(\rho^{-1}H)(\tau H)(\rho H)= \tau^{-1}\rho^{-1}\tau\rho H=(\alpha\ \beta\ \gamma)H$

$$(\tau^{-1}H)(\rho^{-1}H)(\tau H)(\rho H)= (\tau H)^{-1}(\rho H)^{-1}(\tau H)(\rho H)=$$

(λόγω αντιμεταθετικότητας της G/H)= $(\tau H)^{-1}(\tau H)(\rho H)^{-1}(\rho H)=H$

Επομένως $(\alpha\ \beta\ \gamma)H=H$ κι έτσι θα πρέπει $(\alpha\ \beta\ \gamma)\in H$.

Απόδειξη του θεωρήματος: Αρκεί να δείξουμε ότι για ν≥5 η συμμετρική ομάδα S_ν δεν είναι επιλύσιμη. Για να είναι επιλύσιμη πρέπει να υπάρχει μια σειρά υποομάδων της τέτοια ώστε

$S_\nu > G_1 > G_2 > G_3 > \ldots > \{I\}$ και στη σειρά αυτή κάθε ομάδα να είναι κανονική υποομάδα της προηγούμενης με δείκτη κάποιον πρώτο αριθμό. Δηλαδή $G_{i+1} \lhd G_i$ και $[G_i : G_{i+1}]=p_i$ = πρώτος. Η ομάδα S_ν για ν≥5 περιέχει προφανώς όλους τους 3-κύκλους και η συνθήκη $[G_i : G_{i+1}]=p_i$ δείχνει πως οι ομάδες πηλίκο G_i /G_{i+1} έχουν τάξη πρώτο αριθμό, συνεπώς αυτές θα είναι κυκλικές και κατά συνέπεια αντιμεταθετικές. Τότε όμως το παραπάνω λήμμα μας βεβαιώνει πως όλες οι ομάδες που εμφανίζονται στην παραπάνω σειρά θα περιέχουν όλους τους 3-κύκλους. Τότε όμως είναι αδύνατο η σειρά να τερματίζει στην τετριμμένη ομάδα που περιέχει μόνο την ταυτοτική μετάθεση και το θεώρημα έχει αποδειχτεί!

...Είχε αρχίσει να ξημερώνει όταν ο Evariste Galois τελείωσε το γράμμα:

«Αγαπημένοι μου φίλοι! Προκλήθηκα από δυο πατριώτες-ήταν αδύνατο να αρνηθώ την πρόκληση. Σας ζητώ συγγνώμη που δεν πήρα τη γνώμη κανενός σας. Οι αντίπαλοι μου όμως μου ζήτησαν να δώσω το λόγο της τιμής μου ότι δεν θα ειδοποιήσω κανέναν πατριώτη. Το καθήκον σας είναι πολύ απλό: να αποδείξετε ότι μονομάχησα παρά τη θέλησή μου, και μόνον αφού εξάντλησα κάθε μέσο συμβιβασμού. Τονίστε ότι μου είναι αδύνατον να πω ψέματα ακόμη και για τα πιο τετριμμένα ζητήματα. Προστατεύστε τη μνήμη μου, αφού η μοίρα δεν θέλησε να μου δώσει αρκετή ζωή για να γνωρίσει η πατρίδα το όνομά μου. Πεθαίνω, παντοτινά φίλος σας».

Το πρωινό της 30 Μαΐου του 1832 ,ένας περαστικός τον βρήκε βαριά πληγωμένο από πιστόλι κοντά στην όχθη της λίμνης Γκλασσιέ , στο παρισινό προάστιο Ζαντιγύ. Ο τραυματίας μεταφέρθηκε στο νοσοκομείο Κοσέν όπου πέθανε την επόμενη μέρα στις 12 π.μ. έχοντας στο προσκέφαλο τον μικρότερό του αδελφό.

Πριν πεθάνει έγραψε ένα γράμμα στο φίλο του Auguste Chevalier, ζητώντας του να δείξει ένα μαθηματικό του χειρόγραφο[1] στους γερμανούς μαθηματικούς Jacobi και Gauss. Το κείμενο όμως δεν δημοσιεύτηκε παρά έπειτα από δεκατέσσερα χρόνια, και ακόμη και τότε πέρασε ουσιαστικά απαρατήρητο. Οι ιδέες του Galois έγιναν πλήρως αποδεκτές μόνο κατά τη δεκαετία του 1870, μετά την έκδοση του βιβλίου του Camille Jordan Οι αλγεβρικές εξισώσεις και η θεωρία αντικαταστάσεων. Η κύρια αξία της εργασίας του δεν έγκειται στο ότι απάντησε εξαντλητικά σ’ ένα ερώτημα πρόκληση για κάθε μαθηματικό επί τρεις αιώνες. Το πραγματικά σημαντικό ήταν η μέθοδός του, στην οποία κεντρική θέση έχουν οι έννοιες της ομάδας και τις συμμετρίας. Οι ιδέες του Galois αποδείχτηκαν γόνιμες για όλους τους κλάδους των μαθηματικών και της θεωρητικής φυσικής. Το πεδίο εφαρμογής της γενικής ιδέας της συμμετρίας εκτείνεται από την αφηρημένη άλγεβρα έως τη θεωρία στοιχειωδών σωματιδίων. Είναι σχεδόν αδύνατον στην ιστορία των μαθηματικών να βρούμε άλλο παράδειγμα τόσο μικρής εργασίας που να έχει ασκήσει τέτοια τεράστια επίδραση.

[1] Το χειρόγραφο αυτό το είχε ολοκληρώσει λίγο νωρίτερα στις φυλακές τις Αγίας Πελαγίας όπου ήταν κρατούμενος για πολιτικούς λόγους. Εκεί είχε γνωρίσει και την κόρη του γιατρού των φυλακών , Stephanie Dumotel η οποία υπήρξε και η αιτία της μονομαχίας του με δυο φίλους της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Άλγεβρα Κ.Λάκκη εκδόσεις Ζήτη
2. Θεωρία Galois Joseph Rotman , εκδόσεις leader Books
3. Το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, Benjamin Fine-Gerhard Rosenberger, εκδόσεις Leader Books
4. Μαθήματα επί της θεωρίας Galois , Στυλιανός Ανδρεαδάκης, εκδόσεις ΑΘΗΝΑΙ
5. Μαθήματα επί της θεωρίας ομάδων, Στυλιανός Ανδρεαδάκης, εκδόσεις ΑΘΗΝΑΙ
6. Στοιχειώδης εισαγωγή στα ανώτερα μαθηματικά, D.E. Littlewood
7. Άλγεβρα Ι, Ευάγγελου Ψωμόπουλου, Θεσσαλονίκη
8. Γραμμική Άλγεβρα Α, Συμεών Μποζαπαλίδης, Θεσσαλονίκη
9. Περιοδικό QUANTUM Τόμος 3/Τεύχος 4
10. Galois Theory Harold M. Edwards , Springer- Verlag
11. An Introduction to Galois Theory, AndrewBaker, Department of Mathematics, University of Glasgow. E-mail address: a.baker@maths.gla.ac.uk URL: http://www.maths.gla.ac.uk/~ajb
12. Εξισώσεις τρίτου βαθμού-Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς. Κασαπίδης Γεώργιος, Δράμα 2000
13. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Galois.html
14. http://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois
15. http://nrich.maths.org/1422