Αν $\left(f_n(z)\right)$ είναι μια ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων στην περιοχή $G$ και αν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ ομοιόμορφα σε κάθε κλειστή υποπεριοχή της $G$, τότε η $f(z)$ είναι αναλυτική στην $G$ και μάλιστα $f'(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(z)$.

απόδειξη

Έστω $z$ τυχαίο (σταθερό) στοιχείο της $G$, και $B(z,r)$ είναι ένας κυκλικός δίσκος ώστε $\overline{B(z,r)} \subset G$.

Από τον τύπο του Cauchy έχουμε:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Αφού η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη πάνω στο $\partial B$, θα έχουμε:

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_\varepsilon \text{ και κάθε } \zeta \in \partial B.$$

Επομένως $$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}\frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|}\, d\zeta \leq \frac{\varepsilon \cdot 2\pi r}{2\pi r} = \varepsilon$$

άρα $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\partial B}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ δηλ.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \text{ ή τελικά}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Θα δείξουμε τώρα ότι υπάρχει η παράγωγος $f'(z)$ για κάθε $z \in G$.

$$\frac{1}{h}\left[f(z+h) - f(z)\right] = \frac{1}{2\pi i h}\int_{\partial B}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - (z+h)}\, d\zeta - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i h}\int_{\partial B}\frac{h\, f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\, d\zeta$$

Άρα $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f(z+h) - f(z)\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$

δηλ. $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$

ή $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\lim_{n\to\infty} f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_{\partial B} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n'(z).$$

Για κάθε ακολουθία μιγαδικών αριθμών $\{z_n\}$ η οποία συγκλίνει στο $\infty$ και της οποίας οι όροι διαφέρουν από την αρχή των συντεταγμένων και είναι διατεταγμένοι κατά αύξον μέγεθος του μέτρου τους ($|z_n| \le |z_{n+1}|$), μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακέραια συνάρτηση $f(z)$ της οποίας οι ρίζες είναι ακριβώς οι αριθμοί $z_n$.

απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $\{k_n\}$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων τέτοιων ώστε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n+1}$ να είναι συγκλίνουσα για κάποιο $R \geq 0$. Για μια ακολουθία $\{z_n\}$, μπορούμε να θέσουμε $k_n = [\ln n]$. Πράγματι αν $|z_n|/R > e^2$ για $n > N_0$, τότε $\left(\frac{|z_n|}{R}\right)^{k_n+1} > e^{2([\ln n]+1)} > e^{2\ln n} = n^2$. Δηλαδή

$$\left(\frac{|z_n|}{R}\right)^{k_n+1} < \frac{1}{n^2},$$

και αφού η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ είναι συγκλίνουσα, το ίδιο θα ισχύει και για την $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|z_n|}{R}\right)^{k_n+1}$.

Βέβαια σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να πάρουμε ίσους αριθμούς για τα $k_n$. Για παράδειγμα, αν $z_n = n^2$, αρκεί $k_n = 0$. Αν $z_n = n$ αρκεί $k_n = 1$. $n = 1, 2, 3, \ldots$

Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη συνάρτηση, μπορεί να γραφτεί ως απειρογινόμενο

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)e^{\frac{z}{z_i}+\frac{z^2}{z_i^2\cdot 2}+\cdots+\frac{z^{k_i}}{z_i^{k_i}\cdot k_i}}$$

ή

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)e^{\sum\limits_{j=1}^{k_i}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_i}\right)^j}$$

(Αν $k_i = 0$ υποθέτουμε ότι ο εκθέτης είναι μηδέν).

Υποθέτουμε ότι $R$ είναι τυχαίος θετικός αριθμός. Με $N(R)$ συμβολίζουμε τον θετικό ακέραιο για τον οποίο $|z_n| > 2R$ αν $n > N(R)$. Αν λοιπόν $n > N(R)$, γράφουμε το γινόμενο $\prod\limits_{j=1}^{n}$ στην μορφή

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)e^{\frac{z}{z_i}+\cdots+\frac{z^{k_i}}{z_i^{k_i}\cdot k_i}} = \prod_{i=1}^{N(R)}\cdot\prod_{N(R)+1}^{n} \quad (1)$$

Το πρώτο γινόμενο είναι μια ακέραια συνάρτηση με ρίζες τις $z_1, z_2, \ldots, z_{N(R)}$.

Για το δεύτερο γινόμενο έχουμε: $\prod\limits_{N(R)+1}^{n} =$

$$= \prod_{N(R)+1}^{n} \exp\left\{\ln\left(1-\frac{z}{z_i}\right)+\frac{z}{z_i}+\cdots+\frac{z^{k_i}}{k_i z_i^{k_i}}\right\} =$$

$$= \exp\sum_{N(R)+1}^{n}\left\{\ln\left(1-\frac{z}{z_i}\right)+\frac{z}{z_i}+\cdots+\frac{z^{k_i}}{k_i z_i^{k_i}}\right\}$$

Αφού $|z|\leq R$ και $|z_i|>2R$ βρίσκουμε ότι $\left|\frac{z}{z_i}\right|<\frac{1}{2}$ και έτσι θα έχουμε:

για $|z|<1$

$\ln(1+z) = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots = \sum\limits_{v=1}^{\infty}(-1)^{v+1}\frac{z^v}{v}$

$$\left|\ln\left(1-\frac{z}{z_i}\right)+\frac{z}{z_i}+\cdots+\frac{z^{k_i}}{k_i z_i^{k_i}}\right| = \left|\frac{z^{k_i+1}}{(k_i+1)z_i^{k_i+1}}+\frac{z^{k_i+2}}{(k_i+2)z_i^{k_i+2}}+\cdots\right| \leq$$

$$\frac{|z|^{k_i+1}}{|z_i|^{k_i+1}}+\frac{|z|^{k_i+2}}{|z_i|^{k_i+2}}+\cdots \leq \frac{R^{k_i+1}}{|z_i|^{k_i+1}}\left(1+\frac{R}{|z_i|}+\frac{R^2}{|z_i|^2}+\cdots\right)$$

$$= \frac{R^{k_i+1}}{|z_i|^{k_i+1}}\,\frac{1}{1-\frac{R}{|z_i|}} < \frac{2R^{k_i+1}}{|z_i|^{k_i+1}}$$

Από την παραπάνω ανίσωση και το γεγονός ότι η σειρά $\sum\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{R}{|z_i|}\right)^{k_i+1}$ είναι συγκλίνουσα, προκύπτει ότι και η σειρά $\sum\limits_{N(R)+1}^{\infty}\left\{\ln\left(1-\frac{z}{z_i}\right)+\frac{z}{z_i}+\cdots+\frac{z^{k_i}}{k_i z_i^{k_i}}\right\}$ συγκλίνει

απολύτως και ομοιόμορφα μέσα στον δίσκο $|z|\leq R$.
Έτσι το άθροισμα της σειράς, $\phi_R(z)$ είναι συνάρτηση μονότιμη και αναλυτική μέσα στο δίσκο αυτό.
Παίρνοντας το όριο καθώς $n\to\infty$ στην (1) έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)e^{\frac{z}{z_i}+\cdots+\frac{z^{k_i}}{k_i z_i^{k_i}}}=\prod_{i=1}^{\infty}=\prod_{i=1}^{N(R)}\times e^{\phi_R(z)}$$

Αυτή η συνάρτηση είναι αναλυτική στον δίσκο $|z|\leq R$ και έχει ως ρίζες τους $z_i$ για τους οποίους $|z_i|\leq R$. Αφού αυτό το συμπέρασμα είναι έγκυρο για έναν κύκλο με αυθαίρετα μεγάλη ακτίνα $R$, το απειρογινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε μια ακέραιη συνάρτηση $f(z)$ η οποία έχει ως ρίζες τους μηδενικούς $\{z_n\}$

$$f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_j}\right)e^{\frac{z}{z_j}+\cdots+\frac{z^{k_j}}{k_j z_j^{k_j}}}.$$

Ακέραια λέγεται μια συνάρτηση, που είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του πεπερασμένου μιγαδικού επιπέδου. (Δηλ. σε κάθε σημείο εκτός του $\infty$)

Αν δυο ακέραιες συναρτήσεις $f(z) \not\equiv 0$ και $F(z) \not\equiv 0$ έχουν τις ίδιες ρίζες (με την ίδια πολλαπλότητα), τότε $f(z) = e^{g(z)} \cdot F(z)$, όπου $g(z)$ είναι μια ακέραια συνάρτηση.

απόδειξη

Θεωρούμε το πηλίκο $\phi(z) = \dfrac{f(z)}{F(z)}$.

Η $\phi(z)$ μπορεί να έχει ανωμαλίες (πόλους) μόνο στις θέσεις μηδενισμού της $F(z)$. Όμως αφού κάθε ρίζα της $F(z)$ είναι επίσης ρίζα της $f(z)$ με την ίδια πολλαπλότητα, προκύπτει ότι η $\phi(z)$ δεν έχει πόλους στο πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο.

Όμοια σκεπτόμενοι, βρίσκουμε ότι η $\phi(z)$ δεν μπορεί να έχει ούτε ρίζες στο πεπερασμένο μιγ. επίπεδο. Έτσι η $\phi(z)$ είναι μια ακέραια συνάρτηση, δίχως ρίζες.

Η συνάρτηση $\dfrac{\phi'(z)}{\phi(z)}$ θα είναι επίσης μια ακέραια συνάρτηση, όπως επίσης και το ολοκλήρωμά της από $0$ έως $z$.

Ας είναι λοιπόν $g_1(z) = \int_0^z \dfrac{\phi'(z)}{\phi(z)}\,dz$ τότε

$$g_1(z) = \log \phi(z) \Big|_0^z = \log \phi(z) - \log \phi(0)$$

άρα $\log \phi(z) = g_1(z) + \log \phi(0) = g(z)$, φυσικά η $g(z)$ είναι μια ακέραια συνάρτηση.

έτσι $\phi(z) = e^{g(z)}$, δηλαδή $f(z) = e^{g(z)} \cdot F(z)$.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt$ υπάρχει, $Re(z)>0$

απόδειξη

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν τα ολοκληρώματα

$$I_1=\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,dt \quad \text{και} \quad I_2=\int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt.$$

Το $I_1$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους. Η συνάρτηση $e^{-t} t^{z-1}$ δεν είναι φραγμένη στην περιοχή του μηδενός όταν $0<Re(z)<1$, δεδομένου ότι $t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}=e^{(x-1)\ln t+iy\ln t}$ όπου $z=x+yi$. Άρα $|t^{z-1}|=e^{(x-1)\ln t}=t^{x-1}$

$$|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t}t^{x-1}\le t^{x-1}=\frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{και αφού } 1-x<1$$

+ το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ υπάρχει, συνεπώς θα υπάρχει και το $\int_0^1 |e^{-t}t^{z-1}|\,dt$ άρα και το $\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt$.

φυσικά το $\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt$ υπάρχει όταν $x\ge 1$, δηλαδή το $I_1$ υπάρχει για κάθε $z$, με $Re(z)>0$.

Για το $I_2$ παρατηρούμε ότι αν $k>1$ τότε

++ $$\lim_{t\to+\infty} t^k\cdot e^{-t}\cdot t^{x-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{k+x-1}}{e^t}=0$$

άρα το $I_2$ υπάρχει.

Θα είναι λοιπόν $$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

Την συνάρτηση που ορίζεται από το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ την ονομάζουμε συνάρτηση Γ. Δηλ. $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$, $Re(z)>0$

* Αν $f(x) \geq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta]$ και η $f$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $(\alpha, \beta]$ και $\lim_{x \to \alpha} (x-\alpha)^k f(x) = M$ τότε

i) Αν $k<1$ και $M \in \mathbb{R}$ το Γ.Ο. $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ συγκλίνει

ii) Αν $k \geq 1$ και $M \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ το Γ.Ο. $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ αποκλίνει

** Αν $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [\alpha, +\infty)$ και η $f$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\beta \geq \alpha$ και $\lim_{x \to +\infty} x^k f(x) = M$ τότε

i) Αν $k>1$ και $M \in \mathbb{R}$ το Γ.Ο. $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει

ii) Αν $k \leq 1$ και $M \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ το Γ.Ο. $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ αποκλίνει.

## Η Συνάρτηση Γ

Ορισμός

Αν $Re(z)>0$ ορίζουμε $\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$

- Ισχύει $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$

απόδειξη

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{z}\,dt=\lim_{\mu\to+\infty}\int_0^{\mu} e^{-t}\,t^{z}\,dt$$

$$\Gamma(z+1)=\lim_{\mu\to\infty}\left[-e^{-t}t^{z}\Big|_0^{\mu}+\int_0^{\mu} e^{-t}\,z\,t^{z-1}\,dt\right]$$

Αν $m\in\mathbb{N}^*$ $\Gamma(m+1)=m!$

$$\Gamma(z+1)=\lim_{\mu\to\infty} z\int_0^{\mu} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt = z\cdot\Gamma(z)$$

Έτσι η Γ είναι γενίκευση της συνάρτησης παραγοντικό.

$*$ $\lim_{\mu\to+\infty} e^{-\mu}\mu^{z}=0$ Αφού $\left|e^{-\mu}\mu^{z}\right|=\frac{|\mu^{z}|}{e^{\mu}}=\frac{\mu^{x}}{e^{\mu}}$

όπου $x=Re(z)>0$. Με συνεχή εφαρμογή του κανόνα Λοπιτάλ, η απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, ανάγεται στην $x(x-1)\cdots(x-n+1)\frac{\mu^{x-n}}{e^{\mu}}$

με $x-n<0$ οπότε $\lim_{\mu\to+\infty} x(x-1)\cdots(x-n+1)\frac{\mu^{x-n}}{e^{\mu}}=0$

- $\Gamma(m)=2\int_0^{\infty} x^{2m-1}e^{-x^2}\,dx$ , $m>0$

απόδειξη

$$\Gamma(m)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{m-1}\,dt \;,\quad \text{θέτουμε } t=x^2$$

$$\Gamma(m)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,x^{2m-2}\,2x\,dx$$

$$\Gamma(m)=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,x^{2m-1}\,dx\,.$$

## Αναλυτική επέκταση της συνάρτησης Γ

Εξ' ορισμού $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ με $Re(z)>0$.

Όταν $Re(z)\le 0$ το παραπάνω ολοκλήρωμα αποκλίνει. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$ για την επέκταση της Γ και στο αρνητικό ημιεπίπεδο.
έχουμε λοιπόν

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)$$
$$\Gamma(z+2)=(z+1)\,\Gamma(z+1)=(z+1)\,z\cdot\Gamma(z)$$
$$\Gamma(z+3)=(z+2)\,\Gamma(z+2)=(z+2)(z+1)\cdot z\cdot\Gamma(z)$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)\cdots(z+2)(z+1)\cdot z\cdot\Gamma(z)$$

δηλ.

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z\cdot(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

η Γ είναι αναλυτική για $Re(z)>0$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η $\Gamma(z)$ είναι επίσης αναλυτική για κάθε $z$ με $Re(z)>-n-1$ εκτός των σημείων $z=0,-1,-2,\dots,-n$ όπου η Γ έχει απλούς πόλους. Αφού αυτό ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο $n$, προκύπτει ότι η Γ είναι αναλυτική για κάθε $z$, εκτός των $z=0,-1,-2,\dots$ όπου η $\Gamma(z)$ έχει απλούς πόλους.

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}}$$

όπου $c$ η σταθερά του Euler $c = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n\right) \simeq 0,5772$

απόδειξη

Σύμφωνα με το θεώρημα Weierstrass, Αν $f(z)$ είναι αναλυτική για κάθε $z$ στο πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο (δηλ είναι μια ακέραια συνάρτηση) και έχει απλές ρίζες στα σημεία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, όπου $0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < |\alpha_3| < \dots$ και $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = \infty$, τότε η $f(z)$ μπορεί να γραφεί υπο μορφή απειρογινομένου:

$$f(z) = f(0) \cdot e^{\frac{f'(0)}{f(0)} z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}}$$

Στην περίπτωσή μας θέτουμε $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)}$. Αφού η $\Gamma(z)$ έχει απλούς πόλους στα $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ η $\Gamma(z+1)$ θα έχει απλούς πόλους στα $-1, -2, -3, \dots$ συνεπώς η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)}$ έχει απλές ρίζες στα $-1, -2, -3, \dots$

και είναι αναλυτική στο πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο.

$f(0) = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1$ θα έχουμε λοιπόν:

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{f'(0) z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

Για τον προσδιορισμό του $f'(0)$ θέτουμε $z = 1$ οπότε $1 = e^{f'(0)} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) e^{-\frac{1}{k}}$

$$1 = e^{f'(0)} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1+\frac{1}{k}\right) e^{-\frac{1}{k}}$$ λογαριθμίζοντας έχουμε:

$$f'(0) = -\ln \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right) e^{-\frac{1}{k}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) e^{-\frac{1}{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right)$$

όμως $\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N} - \ln\frac{2}{1} - \ln\frac{3}{2} - \dots - \ln\frac{N+1}{N}\right)$

$$= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\ln(N+1)\right) =$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\ln N-\ln(N+1)+\ln N\right) =$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\ln N\right)-\ln\left(\frac{N+1}{N}\right) = \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\ln N\right)-\ln\frac{N+1}{N}$$

άρα $f'(0)=\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\ln N\right)-\lim\limits_{N\to\infty}\ln\frac{N+1}{N} = C-\ln 1 = C$

τώρα επειδή $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, προκύπτει τελικά

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\cdot e^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}.$$

$$\boxed{\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}}$$

απόδειξη

Ξεκινώντας από τον τύπο γνωρίζουμε, έχουμε:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{cz} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

$$\frac{1}{\Gamma_n(z)} = z e^{cz} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} =$$

$$= z e^{cz} \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n!} e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n!} e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-c\right)}$$

δηλ. $\Gamma_n(z) = \dfrac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n+\ln n-c\right)}$

Είναι $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n(z) = \Gamma(z)$

$$\Gamma_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} e^{z\ln n} \cdot e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n-c\right)}$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n-c\right)=0$ και $e^{z\ln n} = n^z$

προκύπτει τελικά ότι $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$.

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0<p<1}$$

απόδειξη

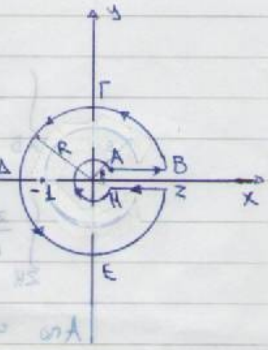
Θεωρούμε το (μιγαδικό) ολοκλήρωμα $\int_C \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz$

Η συνάρτηση $\frac{z^{p-1}}{1+z}$ έχει έναν απλό πόλο στο $z=-1$

και σημείο διακλαδώσεως στο $z=0$.

Ως καμπύλη ολοκληρώσεως $C$, θεωρούμε την καμπύλη του διπλανού σχήματος, όπου ο εξωτερικός κύκλος έχει ακτίνα $R$, ενώ ο εσωτερικός έχει ακτίνα $\varepsilon$.

Τα τμήματα $AB$, $HZ$ ταυτίζονται με τον άξονα $x$.




Θα έχουμε λοιπόν από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων:

$$\int_C \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i\left(\lim_{z\to -1}(1+z)\frac{z^{p-1}}{1+z}\right) = 2\pi i \lim_{z\to -1} e^{(p-1)\ln z} = e$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -1} e^{(p-1)\ln|z| + (p-1)i\,\mathrm{Arg}\,z} = e^{(p-1)\pi i}\cdot 2\pi i$$

Όμως $\int_C \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \int_{AB} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz + \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz + \int_{ZH} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz + \int_{-C_\varepsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz$

$$\int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1}}{1+Re^{i\theta}} Ri e^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} i\frac{R^p e^{i\theta p}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$$

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz\right| \le \frac{2\pi R^p}{R-1} \quad \text{οπότε} \quad \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = 0$$

* $\displaystyle\int_{-c_\varepsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \int_{2\pi}^{0} \frac{i\,\varepsilon^p e^{pi\theta}}{1+\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta$

επίσης $$\int_{c_\varepsilon}\frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^{p-1}e^{(p-1)i\theta}}{1+\varepsilon e^{i\theta}}\,\varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} i\,\frac{\varepsilon^p e^{pi\theta}}{1+\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta$$

$$\left|\int_{c_\varepsilon}\frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz\right| \le 2\pi\frac{\varepsilon^p}{1-\varepsilon}$$ , συνεπώς $$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{c_\varepsilon}\frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz=0 \quad *$$

$$\int_{AB}\frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

$$\int_{ZH}\frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \int_R^\varepsilon \frac{x^{p-1}e^{2\pi i(p-1)}}{1+xe^{2\pi i}}\,e^{2\pi i}\,dx = \int_R^\varepsilon \frac{x^{p-1}e^{2\pi i p}}{1+x}\,dx$$

Από την (1) παίρνοντας το όριο όταν $\varepsilon\to0$ και $R\to+\infty$ έχουμε

$$2\pi i\, e^{(p-1)\pi i} = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx - e^{2\pi i p}\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

Έτσι $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = -\frac{2\pi i\, e^{p\pi i}}{1-e^{2\pi i p}} = -\frac{2\pi i}{e^{-p\pi i}-e^{\pi p i}}$$

δηλ. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i}-e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Παρατήρηση: Σύμφωνα με το κριτήριο (**) της σελ. ....

και αφού $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{2-p}\frac{x^{p-1}}{1+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1$ , $2-p>1$

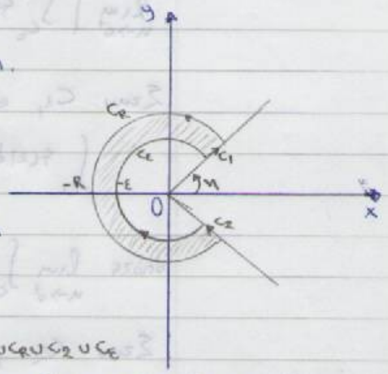
το Γ.Ο $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$ συγκλίνει?

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{\alpha+x}dx$, $0<p<1$, $\alpha>0$

Λύση

Θεωρούμε την μιγαδική συνάρτηση $f(z)=\frac{z^{p-1}}{\alpha+z}$. Αυτή είναι πολυσήμαντη.

Θεωρούμε τον κλάδο της για τον οποίο ισχύει $0 \le Arg\, z < 2\pi$. Το $O$ είναι σημείο διακλαδώσεως και ο άξονας $Ox$ είναι γραμμή διακλαδώσεως. Η $f(z)$ έχει επίσης απλό πόλο στη θέση $z=-\alpha$




Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\Gamma_R = C_1 \cup C_R \cup C_2 \cup C_\varepsilon$ του διπλανού σχήματος, όπου ο εξωτερικός κύκλος $C_R$ έχει ακτίνα $R>\alpha>\varepsilon$, ενώ ο εσωτερικός κύκλος $C_\varepsilon$, έχει ακτίνα $\varepsilon$.

Η $f(z)$ είναι αναλυτική στο εσωτερικό και πάνω στην $\Gamma_R$, εκτός του σημείο $-\alpha$, όπου έχει απλό πόλο. Έτσι θα έχουμε:

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to-\alpha}(z+\alpha)\frac{z^{p-1}}{z+\alpha} = 2\pi i \lim_{z\to-\alpha} e^{(p-1)\ln z}$$

έτσι

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\, e^{(p-1)\ln(-\alpha)} = 2\pi i\, e^{(p-1)(\ln|-\alpha|+i\pi)} = 2\pi i\, e^{(p-1)(\ln\alpha+i\pi)} \quad (1)$$

Απ' την άλλη

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz \quad (2)$$

έχουμε $|z^{p-1}| = |e^{(p-1)[\ln|z|+i\theta]}| = |z|^{p-1}$

στην $C_R$ έχουμε: $z=Re^{i\theta}$, $\eta\le\theta\le 2\pi-\eta$. Έτσι έχουμε

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^{p-1}}{z+\alpha}dz\right| = \left|\int_\eta^{2\pi-\eta}\frac{R^{p-1}e^{i(p-1)\theta}}{Re^{i\theta}+\alpha}R\cdot i e^{i\theta}d\theta\right| = \left|i\int_\eta^{2\pi-\eta}\frac{R^p e^{ip\theta}}{Re^{i\theta}+\alpha}d\theta\right| \le$$

$$\int_\eta^{2\pi-\eta}\frac{R^p}{|Re^{i\theta}+\alpha|}d\theta \le \int_\eta^{2\pi-\eta}\frac{R^p}{R-\alpha}d\theta = \frac{R^p}{R-\alpha}(2\pi-2\eta)$$

$$\lim_{\eta\to 0^+}\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{R^p}{R-\alpha}\cdot 2\pi \quad (3)$$

Στην $C_\varepsilon$, όπου $z=\varepsilon\cdot e^{i\theta}$ $\eta\leq\theta\leq 2\pi-\eta$ παρόμοια έχουμε

$$\lim_{\eta\to 0^+}\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon-\alpha}\,2\pi \quad (4)$$

Στην $C_1$, είναι $z=\tau e^{i\eta}$ $\varepsilon\leq\tau\leq R$ οπότε

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{\tau^{p-1}e^{i\eta(p-1)}}{\tau e^{i\eta}+\alpha}\,e^{i\eta}\,d\tau = \int_\varepsilon^R \frac{\tau^{p-1}e^{i\eta p}}{\tau e^{i\eta}+\alpha}\,d\tau$$

οπότε $\displaystyle\lim_{\eta\to 0^+}\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{\tau^{p-1}}{\tau+\alpha}\,d\tau \quad (5)$

Στην $C_2$, $z=\tau e^{i(2\pi-\eta)}$, $\varepsilon\leq\tau\leq R$

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_R^\varepsilon \frac{\tau^{p-1}e^{i(2\pi-\eta)(p-1)}}{\tau\cdot e^{i(2\pi-\eta)}+\alpha}\,e^{i(2\pi-\eta)}\,d\tau = -\int_\varepsilon^R \frac{\tau^{p-1}e^{i(2\pi-\eta)p}}{\tau e^{i(2\pi-\eta)}+\alpha}\,d\tau$$

και $\displaystyle\lim_{\eta\to 0^+}\int_{C_2} f(z)\,dz = -e^{i2\pi p}\int_\varepsilon^R \frac{\tau^{p-1}}{\tau+\alpha}\,d\tau \quad (6)$

Από τις (1), (2) παίρνοντας το όριο όταν $\eta\to 0^+$ έχουμε:

$$\int_\varepsilon^R \frac{\tau^{p-1}}{\tau+\alpha}\,d\tau - e^{2\pi i p}\int_\varepsilon^R \frac{\tau^{p-1}}{\tau+\alpha}\,d\tau + \lim_{\eta\to 0^+}\int_{C_R} f(z)\,dz + \lim_{\eta\to 0^+}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i\, e^{(p-1)(\ln\alpha + i\pi)}$$

παίρνοντας τώρα τα όρια όταν $\varepsilon\to 0^+$ και $R\to+\infty$, από τις (3), (4) προκύπτει ότι $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\lim_{\eta\to 0^+}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right]=0$

και $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left[\lim_{\eta\to 0^+}\int_{C_R} f(z)\,dz\right]=0$ οπότε

$$\left(1-e^{2\pi i p}\right)\int_0^\infty \frac{\tau^{p-1}}{\tau+\alpha}\,d\tau = 2\pi i\, e^{(p-1)(\ln\alpha+i\pi)} = 2\pi i\,\alpha^{p-1}\cdot e^{(p-1)i\pi} = 2\pi i\,\alpha^{p-1}e^{p\pi i}$$

άρα

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x+\alpha}\,d\tau = 2\pi i\,\alpha^{p-1}\frac{e^{p\pi i}}{e^{2\pi i p}-1} = \pi\cdot\alpha^{p-1}\frac{1}{\frac{1}{2i}\left(e^{\pi p i}-e^{-\pi p i}\right)} = \frac{\pi\alpha^{p-1}}{\sin\pi p}\,.$$

- $$\boxed{\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}}$$

απόδειξη

Θα δείξουμε την παραπάνω σχέση, πρώτα για $0<z<1$

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(1-m)=2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx\cdot 2\int_0^\infty y^{1-2m}e^{-y^2}dy=$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}\cdot y^{1-2m}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \quad \text{όπου } 0<m<1$$

παίρνοντας σε πολικές συντεταγμένες $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r$$

έτσι θα έχουμε:

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(1-m)=4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} r e^{-r^2}(\tan\theta)^{1-2m}\,dr\,d\theta$$

$$=4\int_0^\infty r e^{-r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan\theta)^{1-2m}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan\theta)^{1-2m}d\theta$$

Όμως το $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ θέτοντας $x=\tan^2\theta$ γίνεται:

$$\frac{\pi}{\sin p\pi}=\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan\theta)^{2p-2}}{1+\tan^2\theta}\,2\tan\theta\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{(\tan\theta)^{2p-1}}{1+\tan^2\theta}(1+\tan^2\theta)\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}(\tan\theta)^{2p-1}d\theta$$

οπότε με $p=1-m$ προκύπτει

$$\frac{\pi}{\sin(\pi-m\pi)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan\theta)^{1-2m}d\theta \quad \text{και τελικά}$$

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(1-m)=\frac{\pi}{\sin\pi m}.$$

Αμφότερα τα μέλη της $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ είναι συναρτήσεις αναλυτικές σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός των απλών πόλων στα σημεία $0, -1, -2, -3, \ldots$

Αφού η ισότητα είναι αληθής για το τμήμα που ορίζεται από την $0 < z < 1$, λόγω αναλυτικής συνέχισης(*) η σχέση (ισότητα) θα ισχύει για όλους τους μιγαδικούς, πλην των $0, -1, -2, \ldots$

(*) Αν $F_1(z)$, $F_2(z)$ είναι αναλυτικές σ' έναν τόπο $R$ και $F_1(z) = F_2(z)$ σ' ένα τόξο $PQ$ του $R$, τότε $F_1(z) = F_2(z)$ σ' όλον τον τόπο.

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} \text{, δηλαδή}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \pi \quad \text{άρα} \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ έτσι $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty y^3 e^{-2y}\, dy$

Λύση

$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$ Θέτουμε $t=+2y$ οπότε $dt=+2dy$

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-2y}(2y)^{z-1}\, 2dy = \int_0^\infty e^{-2y}\, 2^z \cdot y^{z-1}\, dy$$

$$\Gamma(4)=2^4\int_0^\infty e^{-2y}y^3\,dy \Rightarrow 3! = 2^4\int_0^\infty e^{-2y}y^3\,dy$$

άρα $\int_0^\infty e^{-2y}y^3\,dy = \frac{3!}{2^4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty y^2 e^{-2y^2}\,dy$

Λύση

$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt.$ Θέτουμε $t=2y^2$, $dt=4y\,dy$

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-2y^2}(2y^2)^{z-1}\,4y\,dy = 2^{z+1}\cdot\int_0^\infty e^{-2y^2}y^{2z-1}\,dy$$

Αν $2z-1=2$ τότε $z=\frac{3}{2}$. Έτσι θα έχουμε:

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}+1}\int_0^\infty e^{-2y^2}y^2\,dy \Rightarrow \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=4\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-2y^2}y^2\,dy$$

άρα $\int_0^\infty e^{-2y^2}y^2\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2\cdot 4\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{16}$.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}} e^{-3u}\, du$

Λύση

$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$. Θέτουμε $t=3u$, $dt=3du$

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-3u}(3u)^{z-1}\,3\,du = 3^{z}\int_0^\infty e^{-3u} u^{z-1}\, du$$

Αν $z-1=\frac{3}{2}$, τότε $z=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$.

Έτσι $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=3^{\frac{5}{2}}\int_0^\infty e^{-3u} u^{\frac{3}{2}}\, du \Rightarrow$

$$\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=9\sqrt{3}\int_0^\infty e^{-3u} u^{\frac{3}{2}}\, du \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty e^{-3u} u^{\frac{3}{2}}\, du=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{9\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3\pi}}{36}.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \left\{\ln\frac{1}{t}\right\}^{-\frac{1}{2}} dt$

Λύση

Θέτουμε $u=\ln\frac{1}{t}=-\ln t$, $du=-\frac{1}{t}\,dt$

άρα $dt=-t\,du=-e^{-u}\,du$

έτσι βρίσκουμε:

$$\int_0^1\left\{\ln\frac{1}{t}\right\}^{-\frac{1}{2}}dt=\int_\infty^0 u^{-\frac{1}{2}}\left(-e^{-u}\right)du=\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Να αποδειχθεί ότι $\Gamma(z)=\int_0^1 \left\{\ln\frac{1}{t}\right\}^{z-1} dt$, για $Re(z)>0$

απόδειξη

Θέτουμε $u=\ln\frac{1}{t}=-\ln t$

Τότε $du=-\frac{1}{t}dt$ και $dt=-t\,du=-e^{-u}du$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$\int_0^1 \left\{\ln\frac{1}{t}\right\}^{z-1} dt=\int_\infty^0 u^{z-1}(-e^{-u})du=\int_0^\infty u^{z-1}e^{-u}du=\Gamma(z).$$

Να αποδειχτεί ότι $\int_1^\infty \frac{(x-1)^p}{x^2}dx=\Gamma(1+p)\Gamma(1-p)$, $-1<p<1$

απόδειξη

Το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{(x-1)^p}{x^2}dx=\int_1^2 \frac{(x-1)^p}{x^2}dx+\int_2^\infty \frac{(x-1)^p}{x^2}dx$

Παρατηρούμε τώρα ότι $\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{-p}\frac{(x-1)^p}{x^2}=1$ οπότε αν $-p<1 \Leftrightarrow$

$p>-1$ το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{(x-1)^p}{x^2}dx$ συγκλίνει

Επίσης $\lim_{x\to+\infty} x^{2-p}\frac{(x-1)^p}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^p=1$

Έτσι, αν $2-p>1 \Leftrightarrow p<1$ το ολοκλήρωμα $\int_2^\infty \frac{(x-1)^p}{x^2}dx$ συγκλίνει.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{(x-1)^p}{x^2}dx$ συγκλίνει για κάθε $p\in(-1,1)$.

Θα δείξουμε ότι $\int_1^\infty \frac{(x-1)^p}{x^2}dx=\int_1^\infty \frac{(x-1)^{-p}}{x^2}dx$.

Στο $\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^{-p}}{x^2}\,dx$ θέτουμε $u = \frac{1}{x-1}$. Τότε $du = -\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

και έτσι $\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^{-p}}{x^2}\,dx = \int_{\infty}^{0} \frac{u^p}{\frac{(1+u)^2}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du =$

$= \int_0^{\infty} \frac{u^p}{(1+u)^2}\,du$ θέτοντας τώρα $y = 1+u$, έχουμε

$= \int_1^{\infty} \frac{(y-1)^p}{y^2}\,dy = \int_1^{\infty} \frac{(x-1)^p}{x^2}\,dx$.

Τώρα για $0<p<1$ δείξαμε ότι $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$

$= \Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)$. Με παραγοντική ολοκλήρωση, έχουμε:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{(u-1)^{p-1}}{u}\,du = \int_1^{\infty} \frac{p^{-1}\left[(u-1)^p\right]'}{u}\,du =$$

$$p^{-1}\frac{(u-1)^p}{u}\Big|_1^{\infty} - p^{-1}\int_1^{\infty} \frac{(u-1)^p}{-u^2}\,du = p^{-1}\int_1^{\infty} \frac{(u-1)^p}{u^2}\,du$$

ώστε $\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^p}{x^2}\,dx = p\cdot\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = p\cdot\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)$

Δηλαδή $\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^p}{x^2}\,dx = \Gamma(p+1)\,\Gamma(1-p)$ και $0<p<1$

Όταν $-1<p<0$ τότε $0<-p<1$ έτσι θα είναι

$$\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^{-p}}{x^2}\,dx = \Gamma(1-p)\cdot\Gamma(1+p).$$

Αφού όμως $\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^{-p}}{x^2}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{(x-1)^p}{x^2}\,dx$ θα έχουμε

τελικά $\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^p}{x^2}\,dx = \Gamma(1-p)\,\Gamma(1+p)$ για κάθε $p\in(-1,1)$.

Αν μ, ν και α είναι θετικοί (σταθεροί) αριθμοί, δείξτε ότι:

$$\int_0^\infty x^{\mu} e^{-\alpha x^{\nu}}\, dx = \frac{1}{\nu}\, \alpha^{-\frac{\mu+1}{\nu}}\, \Gamma\left(\frac{\mu+1}{\nu}\right)$$

απόδειξη

Είναι $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$

Θέτουμε $t = \alpha x^{\nu}$, $dt = \nu \alpha x^{\nu-1}\, dx$

έτσι έχουμε:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^{\nu}} \alpha^{z-1} \cdot x^{\nu(z-1)} \cdot \nu \alpha x^{\nu-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x^{\nu}} \alpha^{z} x^{\nu z-1} \cdot \nu\, dx$$

Συν. $\Gamma(z) = \alpha^{z} \int_0^\infty e^{-\alpha x^{\nu}} x^{\nu z-1} \cdot \nu\, dx$

Αν $\nu z - 1 = \mu$, τότε $z = \frac{\mu+1}{\nu}$. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\Gamma\left(\frac{\mu+1}{\nu}\right) = \alpha^{\frac{\mu+1}{\nu}} \cdot \nu \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha x^{\nu}} x^{\mu}\, dx$$ , συνεπώς

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^{\nu}} \cdot x^{\mu}\, dx = \frac{1}{\nu}\, \alpha^{-\frac{\mu+1}{\nu}} \cdot \Gamma\left(\frac{\mu+1}{\nu}\right).$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (x\log x)^4 dx$

Λύση

Θέτουμε $u=-\log x$, $du=-\frac{1}{x}dx$, $x=e^{-u}$

οπότε παίρνουμε:

$$\int_0^1 (x)^4 \log^4 x\, dx = \int_\infty^0 e^{-4u} u^4 (-e^{-u})\, du =$$

$$\int_0^\infty e^{-5u} u^4\, du.$$

Όμως $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$

Θέτουμε $t=5u$, $dt=5du$

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-5u}\, 5^{z-1} u^{z-1} \cdot 5du = 5^z \cdot \int_0^\infty e^{-5u} u^{z-1}\, du$$

Αν $z-1=4$ τότε $z=5$, οπότε:

$$\Gamma(5)=(5-1)! = 5^5 \cdot \int_0^\infty e^{-5u} u^4\, du$$

Τελικά προκύπτει

$$\int_0^\infty e^{-5u} u^4 = \frac{4!}{5^5} = \frac{24}{3125}$$

Δηλαδή $\int_0^1 (x\log x)^4 dx = \frac{24}{3125}$.

Να αποδειχτεί ότι $\dfrac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$

απόδειξη

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n) = 2\int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2}\,dx \cdot 2\int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2}\,dy =$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}\cdot y^{2n-1}\, e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Με μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n) = 4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} r^{2m+2n-1} e^{-r^2} \cos^{2m-1}\theta\cdot\sin^{2n-1}\theta\,d\theta\,dr$$

$$= 2\cdot 2\int_0^\infty r^{2(m+n)-1} e^{-r^2}\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta\,\sin^{2n-1}\theta\,d\theta$$

$$= \Gamma(m+n)\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta\,\sin^{2n-1}\theta\,d\theta$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα, με τον μετασχηματισμό $t=\sin^2\theta$ έχουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta\cdot\sin^{2n-1}\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2\theta)^m}{\cos\theta}\,\frac{(\sin^2\theta)^n}{\sin\theta}\,d\theta =$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{\cos\theta}\,\frac{t^n}{\sin\theta}\,\frac{dt}{2\cos\theta\cdot\sin\theta} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{m-1}\cdot t^{n-1}\,dt$$

(θέτοντας $u=1-t$) $= \frac{1}{2}\int_1^0 u^{m-1}(1-u)^{n-1}(-du) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du.$

Έτσι τελικά έχουμε $\dfrac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt.$

* Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$, ορίζει μια συνάρτηση δυο μεταβλητών, που καλείται συνάρτηση B. Είναι λοιπόν

- $B(m,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$ με $Re(m)>0$ και $Re(n)>0$.

Ο ορισμός επεκτείνεται για $Re(m)\leq 0$ και $Re(n)\leq 0$ με αναλυτική επέκταση.

- Ισχύει $B(m,n)=B(n,m)$ όπως φαίνεται στην προηγούμενη απόδειξη

- Θέτοντας $t=x^2$ στο ολοκλήρωμα για την $B(m,n)$ προκύπτει:

$$B(m,n)=2\int_0^1 x^{2m-1}(1-x^2)^{n-1}\,dx.$$

Legendre Duplication Formula
Τύπος διπλασιασμού του Legendre.

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1} \cdot \Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}.$$

απόδειξη

$$\frac{\Gamma(z)\cdot\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\,dt. \quad \left(\text{θέτουμε } t=\frac{x+1}{2}\right)$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{z-1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{z-1} dx = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{z-1}\,dx$$

$$= \frac{2}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-x^2)^{z-1}\,dx = \frac{1}{2^{2z-1}} B\left(\frac{1}{2},z\right) = \frac{1}{2^{2z-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}$$

Έτσι λοιπόν προκύπτει ότι $\Gamma(2z) = \dfrac{2^{2z-1} \cdot \Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$

αφού $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της συνάρτησης γάμμα με απειρογινόμενο, δείξτε ότι: $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$

απόδειξη

Είναι $\dfrac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$

επίσης $\dfrac{1}{\Gamma(-z)} = -z\, e^{-cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}}$

Έτσι $\dfrac{1}{\Gamma(z)} \cdot \dfrac{1}{\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z^2}{k^2}\right) \iff$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \, \frac{1}{\Gamma(-z)\,(-z)} = z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \iff$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}$$ Άρα τελικά έχουμε:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Να αποδειχτεί ότι $\Gamma(m+\frac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2^m}$

και κατόπιν ότι $\Gamma(-m-\frac{1}{2}) = \dfrac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}\,2^{m+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)}$

$m = 0, 1, 2, \dots$

απόδειξη

$$\frac{\Gamma_n(m+\frac{1}{2})}{\Gamma_n(\frac{1}{2})} = \frac{\dfrac{n!\,n^{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2}+1)\cdots(m+\frac{1}{2}+n)}}{\dfrac{n!\,n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\cdots(\frac{1}{2}+n)}} =$$

$$= \frac{n^m\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}}{\frac{2m+1}{2}\,\frac{2m+3}{2}\cdots\frac{2m+2n+1}{2}} = \frac{n^m\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+2n+1)}$$

$$= \frac{n^m\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)(2m+1)\cdots(2n+1)}{(2m+1)(2m+3)\cdots(2n+1)\cdot(2n+3)\cdots(2n+2m+1)}, \quad \text{όπου } n \gg m$$

$$= \frac{n^m\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2m+1)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{(2+\frac{3}{n})(2+\frac{5}{n})\cdots(2+\frac{2m+1}{n})}$$

άρα $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Gamma_n(m+\frac{1}{2})}{\Gamma_n(\frac{1}{2})} = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2^m}$ δηλαδή

$$\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2^m} \iff \Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\cdot 1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2^m}$$

Τώρα έχουμε $\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(1-m-\frac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{\sin(m+\frac{1}{2})\pi} = \dfrac{\pi}{\cos m\pi} = (-1)^m\pi$

έτσι

$$\Gamma(m+\tfrac{1}{2})(-m-\tfrac{1}{2})\Gamma(-m-\tfrac{1}{2}) = (-1)^m\pi \iff$$

$$\Gamma(-m-\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^m\pi}{(-m-\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})} \iff \Gamma(-m-\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^{m+1}\pi}{\frac{(2m+1)}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}\,1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2^m}}$$

$$\iff \Gamma(-m-\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}\,2^{m+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)(2m+1)}.$$

Δείξτε ότι για $y>0$ είναι $|\Gamma(iy)| = \sqrt{\dfrac{\pi}{y\sinh \pi y}}$

Ισχύει ο παραπάνω τύπος για $y<0$;

Λύση

$$\Gamma_n(iy)\overline{\Gamma_n(iy)} = \frac{n!\, n^{iy}}{iy(iy+1)\cdots(iy+n)} \cdot \frac{n!\, n^{-iy}}{-iy(-iy+1)\cdots(-iy+n)} =$$

$$= \frac{n!\,n!}{y^2(1+y^2)(2^2+y^2)\cdots(n^2+y^2)} = \frac{1}{y^2(1+y^2)\left(1+\frac{y^2}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)}$$

έτσι $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(iy)\overline{\Gamma_n(iy)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y^2(1+y^2)\cdots\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{y\,\frac{\sinh \pi y}{\pi}}$

άρα

$$\Gamma(iy)\overline{\Gamma(iy)} = \frac{\pi}{y\sinh \pi y} \quad \text{ή} \quad |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y\sinh \pi y}$$

οπότε $|\Gamma(iy)| = \sqrt{\dfrac{\pi}{y\sinh \pi y}}$.

Όταν $y<0$ τότε $\sinh \pi y<0$ οπότε $y\sinh \pi y>0$. Έτσι ο παραπάνω τύπος εξακολουθεί να ισχύει.