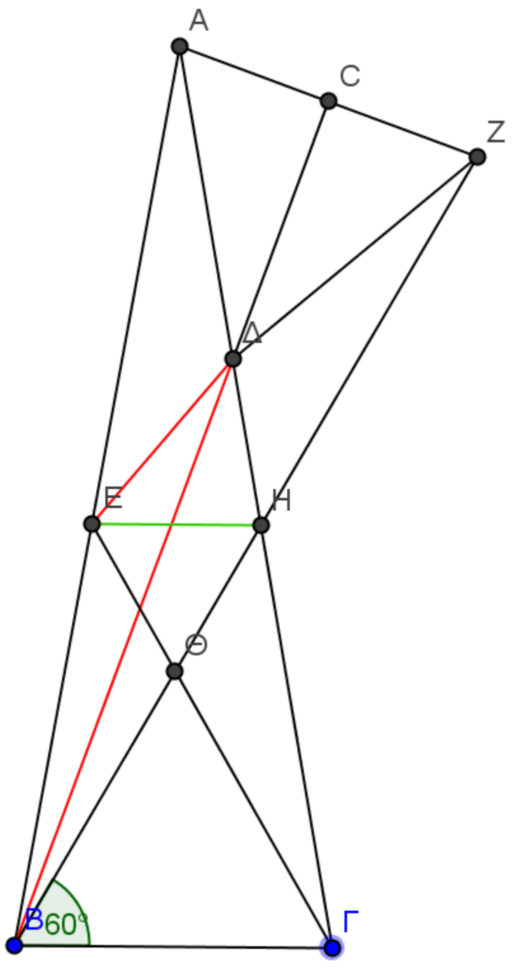
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{\mathrm{A}} = 20^0$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 10^0$ και στην πλευρά ΑΒ το σημείο Ε έτσι ώστε $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{E} = 60^0$. Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{B}$.

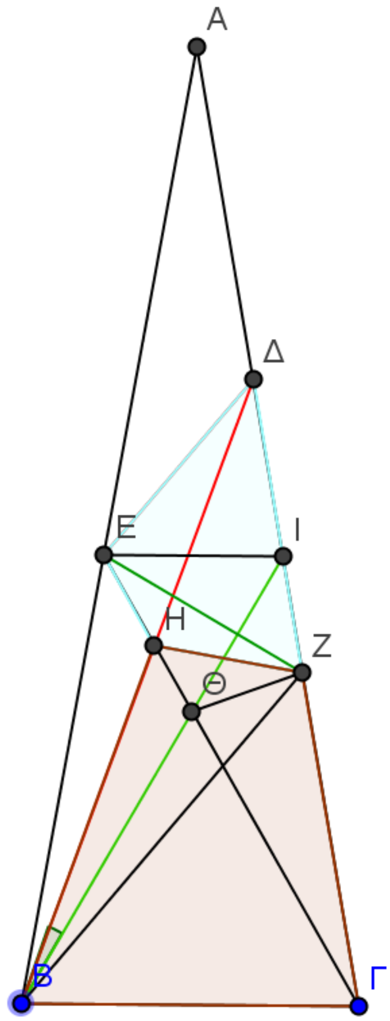
Λύση 1η (Κασαπίδης Γεώργιος 3ο Λύκειο Δράμας)



Θεωρούμε τμήμα ΒΖ=ΑΒ με $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 60^0$. Τότε τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΑΖ είναι ίσα, άρα ΑΖ=ΒΓ. Η ΒΔ ως διχοτόμος της γωνίας Β θα είναι και μεσοκάθετος της ΑΖ. Έτσι ΑΔ=ΔΖ. Όμως $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 80^0$ και ΒΑΔ=20^0. Άρα ΔΑΖ=60^0 συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισόπλευρο και ΑΖ=ΑΔ=ΔΖ=ΒΓ. Τα τρίγωνα ΔΖΗ και ΗΘΓ είναι ίσα αφού έχουν ΔΖ=ΘΓ (δεδομένου πως το ΒΓΘ είναι προφανώς ισόπλευρο) και ΘΗΓ=ΔΗΖ=40^0 ,ΘΓΗ=ΔΖΗ=20^0. Το τρίγωνο ΕΘΗ είναι επίσης ισόπλευρο (αφού ΕΗ//ΒΓ) κι έτσι παρατηρούμε ότι ΔΗ=ΗΘ=ΕΗ. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε ΔΗΕ=80^0 κι έτσι ΕΔΗ=50^0. Όμως ΒΔΗ=30^0 και τελικά προκύπτει ότι **ΕΔΒ=20^0**.

Λύση 2η (Μπουρμάς Θεοδόσιος 3ο Λύκειο Δράμας)

Θεωρούμε σημείο Ι της ΑΓ έτσι ώστε $\Delta\widehat{B}I = 10^0$. Τότε ΕΙ//ΒΓ και τα τρίγωνα ΘΒΓ και ΘΕΙ είναι ισόπλευρα. Φέρνουμε ΕΖ κάθετη στην ΘΙ οπότε ΙΕΖ=ΖΕΗ=30^0. Επειδή και ΗΔΓ=30^0 το τετράπλευρο ΔΕΗΖ είναι εγγράψιμο. Επίσης το τετράπλευρο ΗΖΓΒ είναι εγγράψιμο (αφού ΗΒΖ=ΗΓΖ=20^0). Θα έχουμε επομένως ΔΕΖ=ΔΗΖ=80^0 κι έτσι ΔΕΗ=80+30= 110^0. Επειδή ΕΗΔ=ΒΗΓ=50^0 από το τρίγωνο ΔΕΗ προκύπτει ότι $\mathbf{E\widehat{\Delta}B = 20^0}$

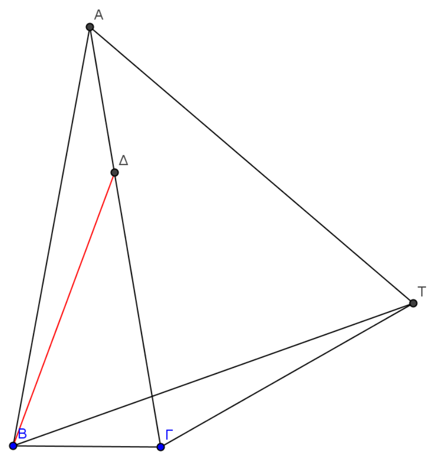


Λύση $3^η$ (Γρηγοριάδης Κυριάκος 3^0 Λύκειο Δράμας)

Λήμμα: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{\mathrm{A}} = 20^0$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 10^0$. Να αποδειχτεί ότι ΑΔ=ΒΓ.

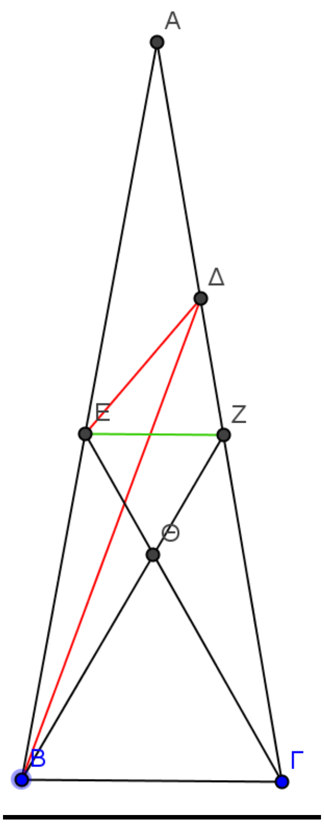
απόδειξη

Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΤ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΓΤ. Αυτά έχουν ΑΒ=ΒΤ, ΑΒΔ=ΒΤΓ=10^0, ΒΑΔ=ΤΒΓ=20^0.
Άρα ΑΔ=ΒΓ.



απόδειξη της αρχικής πρότασης:

Φέρνουμε ΕΖ//ΒΓ. Τότε αφού ΒΓΕ=60^0, και το ΕΖΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο τα τρίγωνα ΒΓΘ και ΘΕΖ θα είναι ισόπλευρα.
Έχουμε τώρα ότι:
ΑΖ=ΒΖ (αφού ΖΒΑ=ΒΑΖ=20^0)
ΑΔ=ΘΒ (=ΒΓ) οπότε αφαιρώντας κατά μέλλη προκύπτει ΔΖ=ΘΖ=ΕΖ.
Όμως ΕΖΔ=80^0 οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε ΕΔΖ=50^0. Τώρα ΒΔΓ=30^0, επομένως $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{B} = 20^0$.



Λύση $4^η$ (Κασαπίδης Γεώργιος 3^0 Λύκειο Δράμας)

Εισάγουμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο Β(0,0) και δίχως βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι Γ(1,0). Τότε οι ευθείες ΑΒ,ΓΕ,ΑΓ,ΒΔ έχουν εξισώσεις

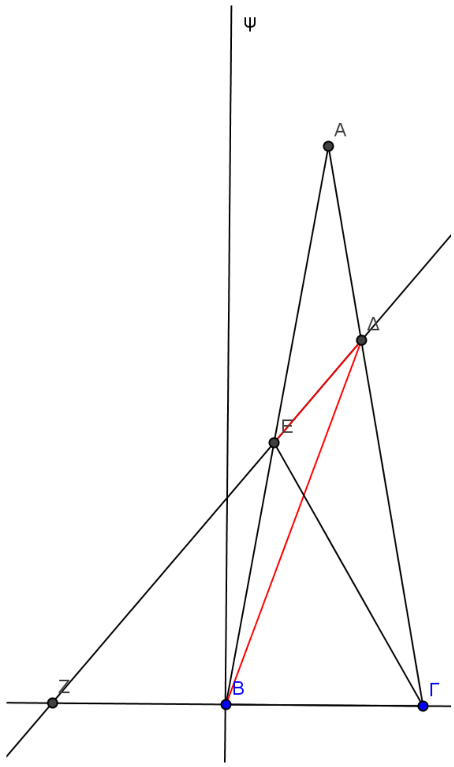
ΑΒ: $ψ=εφ80^0\, χ$

ΕΓ: $ψ=-εφ60^0\,(χ-1)$

ΑΓ: $ψ=-εφ80^0\,(χ-1)$

ΒΔ: $ψ= εφ70^0\, χ$.

Λύνοντας τα συστήματα των ΑΒ,ΕΓ και ΑΓ,ΒΔ βρίσκουμε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε που είναι:



$$Δ\left(\frac{εφ60}{εφ80+εφ60},\frac{εφ60εφ80}{εφ80+εφ60}\right)$$

$$Ε\left(\frac{εφ80}{εφ70+εφ80},\frac{εφ70\ εφ80}{εφ70+εφ80}\right)$$

Υπολογίζουμε τώρα τον συντελεστή διευθύνσεως λ του ΕΔ. Έχουμε

$$λ=\frac{(εφ80)^2(εφ60-εφ70)}{εφ60εφ70-(εφ80)^2}=\frac{εφ60-εφ70}{\frac{εφ60εφ70}{(εφ80)^2}-1}=$$

$$\frac{εφ60-εφ70}{\frac{1}{εφ50εφ80}-1}=\frac{εφ50εφ80(εφ60-εφ70)}{1-εφ50εφ80}=$$

$$\frac{εφ50εφ80εφ10(εφ60-εφ70)}{εφ10-εφ50}=εφ50$$

Άρα ΓΖΕ=50^0 και αφού στο τρίγωνο ΔΖΒ είναι ΖΒΔ=110^0 προκύπτει τελικά ότι $Ε\widehat{Δ}Β=20^0$.

Παρατήρηση: Στους παραπάνω υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε τις ισότητες:

1) $εφ50^0 εφ60^0 εφ70^0 = εφ80^0 = εφ50^0 + εφ60^0 + εφ70^0$
2) $εφ70^0 - εφ60^0 = εφ50^0 - εφ10^0$ που αποδεικνύονται εύκολα με

   χρήση των τύπων $εφA - εφB = \frac{ημ(A-B)}{συνA\ συνB}$ και

   $εφ(α+β) = \frac{εφα + εφβ}{1 - εφα εφβ}$.