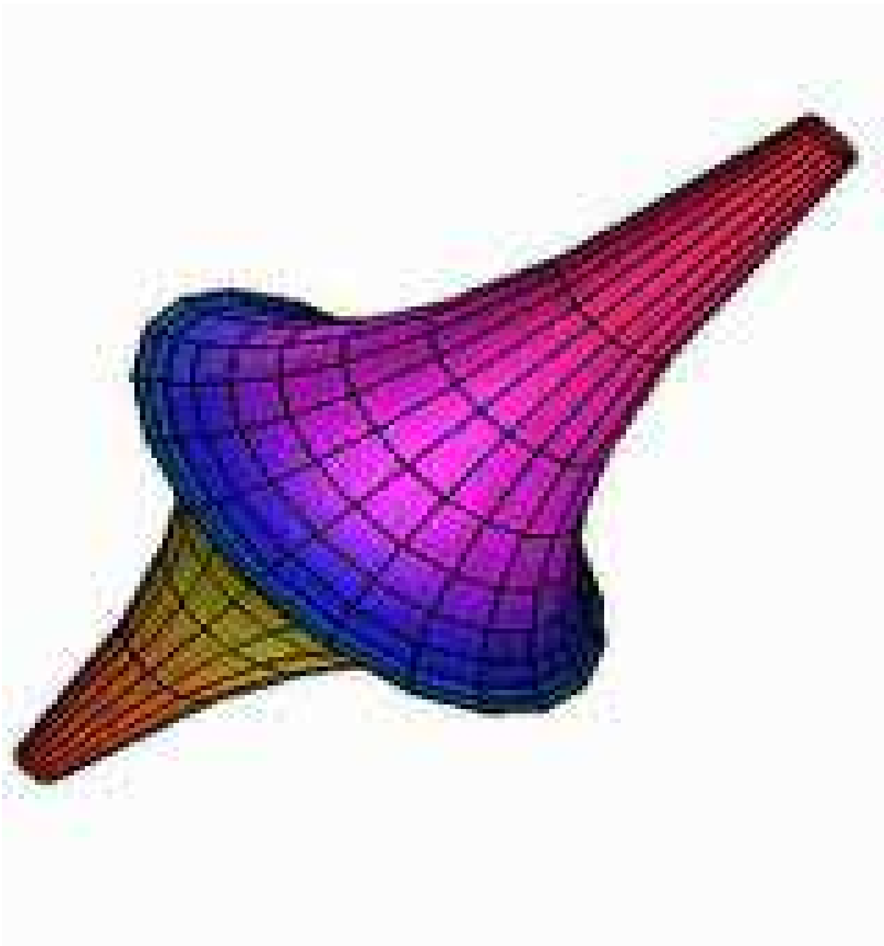
A.S. SMOGORZHEVSKY

LOBACHEVSKIAN GEOMETRY

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ : ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

A.S. Smogorzhevsky

LOBACHEVSKIAN GEOMETRY
ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

πρώτη δημοσίευση «НАУКА» МОСКВА 1976

Μεταφορά από τα Ρωσικά στα Αγγλικά Mir Publishers, 1982

V Kisin

Μεταφορά από τα Αγγλικά στα Ελληνικά

Κασαπίδης Γεώργιος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σημείωμα του συγγραφέα

Ο σκοπός αυτού του βιβλίου είναι να εξοικειώσει τον αναγνώστη στα βασικά της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας του Λομπατσέφσκι.

Ο περίφημος Ρώσος μαθηματικός N. I. Lobachevsky ήταν εξαίρετος στοχαστής, στον οποίο χρεώνεται μια από τις μεγαλύτερες μαθηματικές ανακαλύψεις, η κατασκευή ενός γνήσιου γεωμετρικού συστήματος διαφορετικού από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Ο αναγνώστης θα βρει μια σύντομη βιογραφία του N. I. Lobachevsky στην παράγραφο 1.

Η Ευκλείδεια και η Λομπατσέφσκια γεωμετρία έχουν πολλά κοινά διαφέρουν όμως στους ορισμούς τα θεωρήματα και τους τύπους που έχουν σχέση με το αίτημα των παραλλήλων. Για να διευκρινίσουμε τους λόγους για τους οποίους διαφέρουν πρέπει να δούμε πως γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν οι βασικές γεωμετρικές έννοιες, κι αυτό γίνεται στην παράγραφο 2.

Εκτός από τις γνώσεις της σχολικής επίπεδης γεωμετρίας και τριγωνομετρίας η ανάγνωση αυτού του φυλλαδίου απαιτεί την γνώση ενός μετασχηματισμού γνωστού ως αντιστροφή, τα βασικότερα χαρακτηριστικά του οποίου παρουσιάζονται στην παράγραφο 3. Ελπίζουμε πως ο αναγνώστης θα είναι σε θέση να κατανοήσει τις αρχές της με κέρδος για τον εαυτό του και χωρίς μεγάλη δυσκολία αφού αυτή ,και η παράγραφος 10, παίζουν πολύ σημαντικό, αν και δευτερεύοντα ρόλο στην έκθεσή μας.

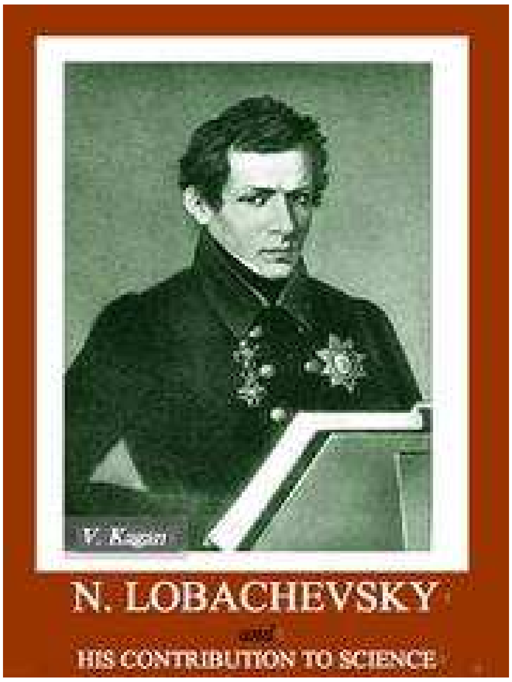
Μέρος 1.
Ένα σύντομο δοκίμιο της ζωής και του έργου του
N.I. Lobachevsky

Ο Νικόλαος Ιβάνοβιτς Λομπατσέφσκι γεννήθηκε την 1η Δεκεμβρίου του 1792 (20 Νοεμβρίου με το παλιό ημερολόγιο) , και ήταν ο γιος ενός κακοπληρωμένου δημοσίου υπαλλήλου. Νωρίς στη ζωή του ο Νικόλαος και τα δυο του αδέρφια αφέθηκαν μόνο στη φροντίδα της μητέρας τους ,μιας δραστήριας και έξυπνης γυναίκας η οποία παρά τα υπερβολικά πενιχρά μέσα της, τους έστειλε όλους στην σχολή γραμμάτων του Καζάν.

Ο Λομπατσέφσκι σπούδασε εκεί από το 1802 μέχρι το 1807 και στο πανεπιστήμιο του Καζάν από το 1807 μέχρι το 1811. Έχοντας εξαιρετικά μαθηματικά ταλέντα ολοκλήρωσε επιτυχώς τις σπουδές του και αφού αποφοίτησε παρέμεινε για να δουλέψει στο Πανεπιστήμιο ως καθηγητής, αξίωμα που του παραχωρήθηκε το 1816.

Η διδασκαλία του Λομπατσέφσκι άφησε βαθιά εντύπωση στις μνήμες των μαθητών του. Οι διαλέξεις του ξεχώριζαν για την διαύγεια της σκέψης τους και την πληρότητα της παρουσίασης. Οι γνώσεις του σε διάφορους κλάδους της επιστήμης ήταν πλατιές και πολύπλευρες, δίνοντάς του την δυνατότητα να διδάσκει όχι μόνα μαθηματικά θέματα, αλλά επίσης και μηχανική, φυσική, αστρονομία, γεωδαισία και τοπογραφία.

Ο Λομπατσέφσκι εκλέχθηκε πρύτανης στο Πανεπιστήμιο του Καζάν το 1827, και κατείχε την θέση αυτή για σχεδόν είκοσι χρόνια. Υπήρξε ένας ταλαντούχος και ενεργητικός διαχειριστής, που με τους διορατικούς στόχους του για υψηλότερη εκπαίδευση, πέτυχε να κάνει το πανεπιστήμιο του Καζάν ένα μοντέλο υψηλότατου εκπαιδευτικού ινστιτούτου της εποχής του. Με πρωτοβουλία του το πανεπιστήμιο άρχισε την δημοσίευση



επιστημονικών πρακτικών. Ανάμεσα στις κατασκευές που έγιναν υπό την εποπτεία του ήταν και το αστρονομικό αστεροσκοπείο.

Αλλά είναι το επιστημονικό του έργο που έκανε τον Λομπατσέφσκι διάσημο. Το όνομά του αποθανατίστηκε για την δημιουργία της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, όπως την ονομάζουμε μετά απ' αυτόν[1].

Στις 23 (11) Φεβρουαρίου 1826 ανέγνωσε μια διατριβή σε μια συνάντηση του τμήματος των Φυσικομαθηματικών επιστημών του πανεπιστημίου του Καζάν, στην οποία για πρώτη φορά κοινοποίησε την μη Ευκλείδεια γεωμετρία που ανακαλύφθηκε απ' αυτόν. Η πρώτη δημοσιευμένη παρουσίαση των αρχών αυτής της γεωμετρίας έγινε στα απομνημονεύματά του On the Fundamentals of Geometry που δημοσιεύτηκαν το 1829 και το 1830 στην εφημερίδα Kazan Herald.

Πολλοί σύγχρονοι του Λομπατσέφσκι δεν κατανόησαν τις ανακαλύψεις του, και το έργο του στην γεωμετρία ,είχε εχθρική υποδοχή τόσο στην Ρωσία όσο και στο εξωτερικό.

[1] Το άλλο όνομα-υπερβολική γεωμετρία- είναι δοσμένο από το γεγονός ότι σ' αυτήν μια ευθεία γραμμή όπως η υπερβολή στην Ευκλείδεια γεωμετρία έχει δυο απείρως απομακρυσμένα σημεία (βλ. παρ.4)

Οι ιδέες του ήταν πολύ τολμηρές και πολύ μακριά από τις κρατούσες επιστημονικές αντιλήψεις της εποχής του, έτσι ώστε χρειάστηκε να περάσει πολύς καιρός για να βρούνε την γενική αποδοχή η οποία ήρθε μόνο μετά τον θάνατό του.

Ο Λομπατσέφσκι δεν μεταπείστηκε για την ορθότητα των συμπερασμάτων του, παρά τις αντίθετες κριτικές, και συνέχισε με όλη την εσωτερική του ενέργεια και αποφασιστικότητα, να εργάζεται πάνω στην ανάπτυξη του γεωμετρικού του συστήματος, δημοσιεύοντας έναν αριθμό από έργα πάνω σε προβλήματα της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας. Το τελευταίο απ' αυτά, ολοκληρώθηκε από τον Λομπατσέφσκι όχι πολύ πριν από το θάνατό του, καθ' υπαγόρευση, μιας κι ο ίδιος δεν ήταν σε θέση να γράψει πια λόγω της τύφλωσης που τον επηρέασε στα τελευταία χρόνια της ζωής του.

Η επιστημονική δραστηριότητα του Λομπατσέφσκι δεν περιορίζεται μόνο στην γεωμετρία. Αυτός έχει επίσης διάφορες θεμελιώδεις συνεισφορές στην άλγεβρα και στο λογισμό. Η μέθοδος προσέγγισης της λύσης μιας αλγεβρικής εξίσωσης που επεξεργάστηκε είναι πολύ κομψή και αποτελεσματική.

Οι φιλοσοφικές απόψεις του Λομπατσέφσκι έχουν μια φανερά εκφρασμένη υλιστική κλίση. Αυτός θεωρούσε ότι το πείραμα και η πράξη είναι τα ποιο αξιόπιστα μέσα για τον έλεγχο των θεωρητικών συμπερασμάτων. Αξίωνε η μαθηματική διδασκαλία να αναδεικνύει τα πραγματικά φαινόμενα πίσω από τις μαθηματικές δράσεις.

Το 1846 ο Λομπατσέφσκι απαλλάχθηκε από τα καθήκοντά του στο πανεπιστήμιο και διορίστηκε βοηθός επιμελητής της εκπαιδευτικής περιοχής του Καζάν.

Πέθανε στις 24 (12) Φεβρουαρίου 1856. Το 1896 στο Καζάν υψώθηκε μνημείο για να τιμήσει την μνήμη του.[1]

[1] Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες λεπτομέρειες για την ζωή του Λομπατσέφσκι στο V.F.Kagan, N. Lobachevsky and His Contribution to the World Science by Foreign Languages Publishing House Moscow, 1957.

Παράγραφος 2. Η προέλευση των Αξιωμάτων και ο ρόλος τους στην Γεωμετρία

Για να αποσαφηνίσουμε το ρόλο των αξιωμάτων θα δώσουμε μια σκιαγράφηση των βασικών βημάτων στην ανάπτυξη της γεωμετρίας από τα αρχαία χρόνια.

Το λίκνο της γεωμετρίας ήταν οι χώρες της Αρχαίας Ανατολής όπου σημαντικοί πρακτικοί κανόνες για την μέτρηση γωνιών, εμβαδών κάποιων σχημάτων, και του όγκου απλών στερεών χρησιμοποιούνταν για χιλιάδες χρόνια ανταποκρινόμενοι στην ανάγκη καταμέτρησης της γης, στην αρχιτεκτονική και την αστρονομία. Αυτοί οι κανόνες αναπτύχθηκαν εμπειρικά (από το πείραμα) και πέρασαν από στόμα σε στόμα. Στα παλαιότερα κείμενα που φτάσανε σε μας συναντάμε συχνά εφαρμογές γεωμετρικών κανόνων, αλλά δεν βρίσκουμε προσπάθειες για την τυποποίησή τους.

Με το πέρασμα του χρόνου ο κύκλος των αντικειμένων στα οποία οι αποκτημένες γεωμετρικές γνώσεις εφαρμόζονταν, διευρύνθηκε και προέκυψε η ανάγκη να τυποποιηθούν οι κανόνες σε όσο το δυνατόν ποιο γενική μορφή, το οποίο έφερε μια κίνηση στη γεωμετρία από την χειροπιαστή αντίληψη προς τις αφηρημένες έννοιες. Για παράδειγμα, ο κανόνας που αναπτύχθηκε για την μέτρηση του εμβαδού ενός ορθογωνίου σχεδίου της γης αποδείχτηκε εφαρμόσιμο για την μέτρηση ενός χαλιού, την επιφάνεια ενός τοίχου κλπ, με αποτέλεσμα εξ' αυτών να αναδυθεί η αφηρημένη έννοια του ορθογωνίου.

Έτσι σχηματίστηκε ένα σύστημα γνώσεων που ονομάστηκε γεωμετρία. Στα πρώιμά της στάδια αυτή ήταν μια εμπειρική επιστήμη, δηλαδή όλα της τα αποτελέσματα παράγονταν κατευθείαν από το πείραμα.

Η ανάπτυξη της γεωμετρίας πήρε μια νέα κατεύθυνση όταν έγινε γνωστό ότι κάποιες από τις προτάσεις της δεν χρειάζονταν εμπειρική τεκμηρίωση, αφού αυτές μπορούσαν να παραχθούν από άλλες προτάσεις, ως συμπεράσματα, ακολουθώντας κάποιους λογικούς κανόνες. Οι προτάσεις της γεωμετρίας τώρα διαιρέθηκαν σε δυο κατηγορίες: αυτές που εγκαθιδρύονταν εμπειρικά (που αργότερα ονομάστηκαν αξιώματα) και αυτές που μπορούσαν να αποδειχτούν λογικά με βάση τα αξιώματα (θεωρήματα).

Επειδή η λογική τεκμηρίωση δεν απαιτεί ούτε ειδικά μέσα ούτε διάφορες κουραστικές μετρήσεις, τεχνικά είναι πολύ απλούστερη από την εμπειρική προσέγγιση, οι επιστήμονες από την αρχαιότητα φυσιολογικά ήρθαν αντιμέτωποι με το πρόβλημα της αναγωγής του πρώτου είδους προτάσεων (αξιώματα) σε έναν ελάχιστο αριθμό προτάσεων έτσι ώστε να ελαφρυνθεί το έργο των γεωμετρών μετακινώντας το κύριο φορτίο της δουλειάς τους, στη σφαίρα της λογικής επιχειρηματολογίας. Αυτός ο στόχος αποδείχτηκε εφικτός αφού η γεωμετρία απομακρύνθηκε από όλες τις ιδιότητες των σωμάτων εκτός της έκτασης, και διαπιστώθηκε ότι όλες οι δυνατές γεωμετρικές σχέσεις μπορούν να παραχθούν από έναν περιορισμένο αριθμό υποθέσεων ή αξιωμάτων.

Έτσι η γεωμετρία μετατράπηκε από εμπειρική σε παραγωγική επιστήμη[1] η οποία στις μέρες μας είναι η αξιωματική παρουσίαση.

Το ποιο πρώιμο βιβλίο το οποίο έφτασε σε μας, με μια συστηματική παρουσίαση των βασικών προτάσεων της γεωμετρίας είναι τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη το οποίο γράφτηκε γύρω στο 300 πΧ.

Αυτό το έργο έχει την ακόλουθη δομή: Μετά τους ορισμούς και τα αξιώματα έρχεται στις αποδείξεις των θεωρημάτων και στις λύσεις προβλημάτων. Κάθε νέο θεώρημα αποδεικνύεται με βάση τα αξιώματα και τα θεωρήματα που έχουν αποδειχθεί πιο πριν. Τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται αλλά απλώς δηλώνονται.

Για δυο χιλιάδες χρόνια τα Στοιχεία του Ευκλείδη απολάμβαναν την αδιαμφισβήτητη αυθεντία ανάμεσα στους διανοούμενους. Ένα

[1] Μια παραγωγή είναι η εξαγωγή ενός συμπεράσματος. Μια επιστήμη καλείται παραγωγική όταν οι νέες δηλώσεις της παράγονται από προηγούμενες με λογικό τρόπο.

σημείο όμως μέσα σ’ αυτά δεν ήταν τελείως νομιμοποιημένο. Αυτό ήταν το (πέμπτο) αίτημα των παραλλήλων διατυπωμένο ως εξής:

Αν μια ευθεία τέμνει δυο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος ‘εντός και επί τα αυτά γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δυο ορθές, τότε οι ευθείες, προεκτεινόμενες κατάλληλα, τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.[1]

Δεν δημιουργήθηκαν αμφιβολίες για την εγκυρότητα του Ευκλείδειου αξιώματος. Η αβεβαιότητα σχετικά μ’ αυτό βρισκόταν κάπου αλλού. Ήταν δικαιολογημένη η θέση του ανάμεσα στα αξιώματα; Μήπως μπορούσε να αποδειχθεί από τα αξιώματα των Στοιχείων κι έτσι να μεταφερθεί στην κατηγορία των θεωρημάτων;

Αρχικά οι προσπάθειες για την απόδειξη του αιτήματος των παραλλήλων αντικατοπτρίζουν την τάση που αναφέραμε παραπάνω για τον περιορισμό των γεωμετρικών προτάσεων που απαιτούσαν εμπειρική τεκμηρίωση. Με την πάροδο του χρόνου η κατάσταση άλλαξε. Η εμπειρική αρχή των αξιωμάτων λησμονήθηκε και άρχισαν να τα μεταχειρίζονται σαν αυταπόδεικτες αλήθειες, ανεξάρτητες από την εμπειρία ή οποιοδήποτε πείραμα.[2] Αυτή η οπτική οδήγησε στην πεποίθηση ότι το αίτημα των παραλλήλων, το οποίο είναι δύσκολο να αναγνωριστεί ως αυταπόδεικτο λόγω της περίπλοκης διατύπωσής του, δεν είναι στην πραγματικότητα αξίωμα αλλά μια δήλωση που πρέπει να αποδειχθεί. Όμως πολλές προσπάθειες προς αυτή την κατεύθυνση δεν είχαν θετικά αποτελέσματα. Σαν τον μαγεμένο θησαυρό, το αίτημα των

---

[1] Στα σχολικά εγχειρίδια το αίτημα παραλλήλων του Ευκλείδη, έχει αντικατασταθεί με την ισοδύναμη πρόταση: *Μόνο μια παράλληλη ευθεία μπορούμε να φέρουμε προς δοθείσα ευθεία από ένα σημείο που δεν ανήκει πάνω σ’ αυτήν.*

Δυο αξιώματα της Ευκλείδειας, ή άλλης γεωμετρίας , θεωρούνται ισοδύναμα, αν από αυτά παράγονται οι ίδιες προτάσεις με την προϋπόθεση ότι όλα τα άλλα αξιώματα παραμένουν ίδια.

[2] Είναι γνωστό ότι άνθρωποι που γεννήθηκαν τυφλοί αλλά ανάκτησαν την όρασή τους χειρουργικώς, δεν μπορούν να ξεχωρίσουν έναν κύβο από μια σφαίρα για κάποιον χρόνο μετά την επέμβαση δίχως πρώτα να τα αγγίξουν. Αυτό δείχνει πως υπάρχει ανάγκη της εμπειρίας για την ορθή αντίληψη των γεωμετρικών εικόνων, δίχως την οποία οι γεωμετρικές έννοιες δεν μπορούν να σχηματιστούν.

παραλλήλων δεν αποκάλυπτε τα μυστικά του στους ερευνητές. Οι απόπειρες για την απόδειξή του, που κατανάλωσαν ένα τρομερό ποσό διανοητικών προσπαθειών γενεών στοχαστών, απέτυχαν ως το τίμημα της ιδεαλιστικής ερμηνείας της ουσίας των αξιωμάτων.

Ο ποιο κοινός τύπος εσφαλμένης απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος παραλλήλων ήταν η αντικατάστασή του με μια ισοδύναμη πρόταση, για παράδειγμα: *Μια κάθετη και μια πλάγια ευθεία πάνω στην ίδια ευθεία τέμνονται, ή δεν υπάρχει τρίγωνο όμοιο προς δοθέν τρίγωνο που να είναι ίσο με αυτό, ή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δοσμένη ευθεία και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της, είναι μια ευθεία γραμμή, ή τρία σημεία είναι είτε συνευθειακά είτε ομοκυκλικά.* Αργότερα διαπιστώθηκε ότι όλες αυτές οι προτάσεις είναι εσφαλμένες αν το Ευκλείδειο αίτημα δεν ισχύει. Συνεπώς λαμβάνοντας ως αξίωμα κάποια απ' αυτές είναι σαν να υποθέτουμε την εγκυρότητα του Ευκλείδειου αιτήματος, δηλαδή υποθέτουμε ότι είναι ορθό αυτό το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε.

Ο Λομπατσέφσκι πήρε διαφορετικό δρόμο στην έρευνά του πάνω στην θεωρία των παραλλήλων. Ξεκινώντας με την απόπειρα να αποδείξει το αξίωμα των παραλλήλων είδε ότι κάποιος οδηγείται σε τελείως αναπάντεχα αποτελέσματα. Αυτές οι απόπειρες συνίσταντο στην χρήση της απόδειξης με αντίφαση (απαγωγή σε άτοπο) και ήταν στηριγμένες στο ακόλουθο επιχείρημα: Αν το Ευκλείδειο αίτημα παραλλήλων είναι συνέπεια των υπόλοιπων αιτημάτων των Στοιχείων, και αν κάποιος υποθέσει κακόβουλα ότι *τουλάχιστον δυο ευθείες που δεν τέμνουν δοθείσα ευθεία και που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο μ' αυτήν μπορούν χαραχθούν από σημείο εκτός αυτής*, τότε αυτή η υπόθεση αργά ή γρήγορα, θα οδηγήσει μέσω των συνεπειών της σε κάποια αντίφαση. Βρίσκοντας όμως ολοένα κι άλλες νέες συνέπειες αυτής της υπόθεσης, ο Λομπατσέφσκι πείστηκε ότι δεν έχει σημασία πόσο παράδοξες φαίνονται αυτές οι συνέπειες από την σκοπιά της Ευκλείδειας γεωμετρίας, κι ότι αυτές μπορούν να σχηματίσουν την βάση μιας νέας επιστημονικής θεωρίας.

Έτσι στην θεμελίωση της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας[1] το αξίωμα των παραλλήλων διαφέρει από αυτό της Ευκλείδειας και συμπίπτει με την υπόθεση που δόθηκε παραπάνω η οποία από δω και πέρα θα αναφέρεται ως Λομπατσέφσκιο αίτημα παραλλήλων.

Βέβαια παραμένει ακόμα ασαφές το κατά πόσο κάποιος μπορεί με σιγουριά να πει ότι καμιά από τις άπειρες δυνατές συνέπειες του Λομπατσέφσκιου αξιώματος παραλληλίας δεν οδηγεί σε αντίφαση. Ο Λομπατσέφσκι σκιαγράφησε έναν τρόπο για την επίλυση αυτού του προβλήματος, επισημαίνοντας ότι η συνέπεια της γεωμετρίας που εξερευνούσε θα ήταν εξασφαλισμένη από την δυνατότητα αριθμοποίησής της, δηλαδή από την δυνατότητα αναγωγής της λύσης κάθε γεωμετρικού προβλήματος σε αριθμητικούς υπολογισμούς και αναλυτικούς μετασχηματισμούς χρησιμοποιώντας τους τύπους της υπερβολικής τριγωνομετρίας που παρήγαγε ο ίδιος. Άλλοι επιστήμονες βρήκαν αργότερα αυστηρές αποδείξεις της συνέπειας της γεωμετρίας του.

Οι έρευνες του Λομπατσέφσκι στο πεδίο της υπερβολικής γεωμετρίας ήταν πολύ μεγάλης έκτασης καλύπτοντας στοιχεία τριγωνομετρίας, αναλυτικής και διαφορικής γεωμετρίας. Χρησιμοποιώντας της μεθόδους της γεωμετρίας του παρήγαγε περισσότερους από 200 νέους τύπους για τον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Οι ανακαλύψεις του Λομπατσέφσκι θεωρήθηκαν από τους συγχρόνους του, ακόμη και από τους μαθητές του, ως τερατώδεις ανοησίες, θρασύτατη περιφρόνηση της λογικής και του κοινού νου[2].

---

[1] Έχει βρεθεί ότι εκτός από την γεωμετρία που ανακάλυψε ο Λομπατσέφσκι, πολλές άλλες ακόμα γεωμετρίες μπορούν να κατασκευαστούν.

[2] Βέβαια δεν μπορεί κανείς με αβάσιμες υποψίες να πει ότι οι σύγχρονοι του Λομπατσέφσκι ήταν ανίκανοι να καταλάβουν τις έρευνές του. Πολλοί δεν εξέφρασαν κάποια άποψη πιθανόν γιατί η περιοχή των επιστημονικών τους ενδιαφερόντων δεν περιλάμβανε την σφαίρα των ερευνών του Λομπατσέφσκι. Επίσης γνωρίζουμε ότι ο περίφημος Γερμανός μαθηματικός Karl Gauss και ο εξαίρετος Ουγγαρέζος γεωμέτρης Janos Bolyai, ανεξάρτητα από τον Λομπατσέφσκι , έφτασαν στην ιδέα της δυνατότητας της κατασκευής μιας μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, συμμεριζόμενοι τις απόψεις του. Ο Gauss φοβούμενος μήπως δεν γίνει κατανοητός και γελοιοποιηθεί, δεν δημοσίευσε του

Μια τέτοια στάση απέναντι σε μια μεγάλη ιδέα που γκρεμίζει ιερές προκαταλήψεις δεν προκαλεί έκπληξη. Η Ηλιοκεντρική θεωρία του Κοπέρνικου, η οποία αρνήθηκε αυτό που φαινόταν προφανές και ισχυριζόταν αυτό που ήταν αδιανόητο να φανεί, είχε την ίδια εχθρική υποδοχή. Χρειάζεται πολύ βαθύτερη αντίληψη για την κατανόηση της αποδεκτικότητας των δυο γεωμετριών. Ας περάσουμε τώρα στην παρουσίαση κάποιων από τα ευκολότερα στην κατανόηση επιχειρημάτων.

Η παράγραφος πάνω στην επίπεδη γεωμετρία στα σχολικά βιβλία μελετά το επίπεδο ανεξάρτητα από τον περιβάλλοντα χώρο. Με άλλα λόγια επιπεδομετρία είναι η γεωμετρία του Ευκλείδειου επιπέδου. Γεωμετρίες κάποιων καμπύλων επιφανειών είναι επίσης πολύ γνωστές. Ένα παράδειγμα είναι η σφαιρική γεωμετρία, η οποία ευρέως χρησιμοποιείται στην αστρονομία και σε άλλους γνωστικούς κλάδους.

Σε κάθε επιστήμη οι απλούστερες έννοιες είναι οι ποιο θεμελιώδεις. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία αυτές είναι οι έννοιες του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου. Αυτοί οι όροι διατηρούνται στην μη-Ευκλείδεια γεωμετρία, έτσι ώστε ‘ευθεία γραμμή’ να σημαίνει μια γραμμή κατά μήκος της οποίας μετράμε την μικρότερη απόσταση μεταξύ δυο σημείων. Το ‘επίπεδο’ είναι η επιφάνεια που έχει την ιδιότητα αν δυο σημεία μιας ‘ευθείας’ ανήκουν στην επιφάνεια, τότε όλα τα σημεία της ‘ευθείας’ ανήκουν στην επιφάνεια. Στην σφαιρική γεωμετρία για παράδειγμα μια σφαίρα και οι μέγιστοι κύκλοι της αναφέρονται αντιστοίχως ως ‘επίπεδο’ και ‘ευθεία γραμμή’. Αυτή η ορολογία είναι τελείως επίκαιρη αφού σε κάθε γεωμετρία η ‘ευθεία’ είναι η απλούστερη απ’ όλες τις γραμμές και το ‘επίπεδο’ είναι το απλούστερο απ’ όλες τις

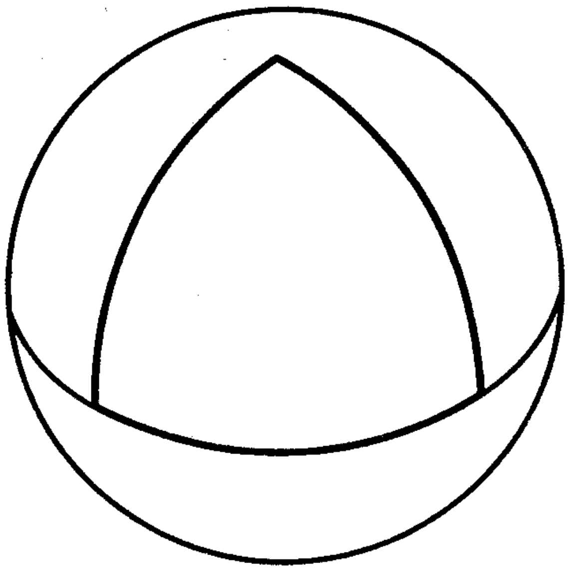
έρευνες στην μη-Ευκλείδεια γεωμετρία (δημοσιευμένες το 1832) δεν έτυχαν κάποια υποστήριξη στις ιδέες του Λομπατσέφσκι, και ο Bolyai βλέποντας πως οι δικές αναγνώρισης, εγκατέλειψε τις μαθηματικές του μελέτες. Έτσι ο Λομπατσέφσκι έμεινε μόνος να παλεύει για την ορθότητα των ιδεών του.

επιφάνειες, πολύ βασικές ιδιότητες που παλαιότερα κατείχαν η Ευκλείδεια ευθεία και το Ευκλείδειο επίπεδο.[1]

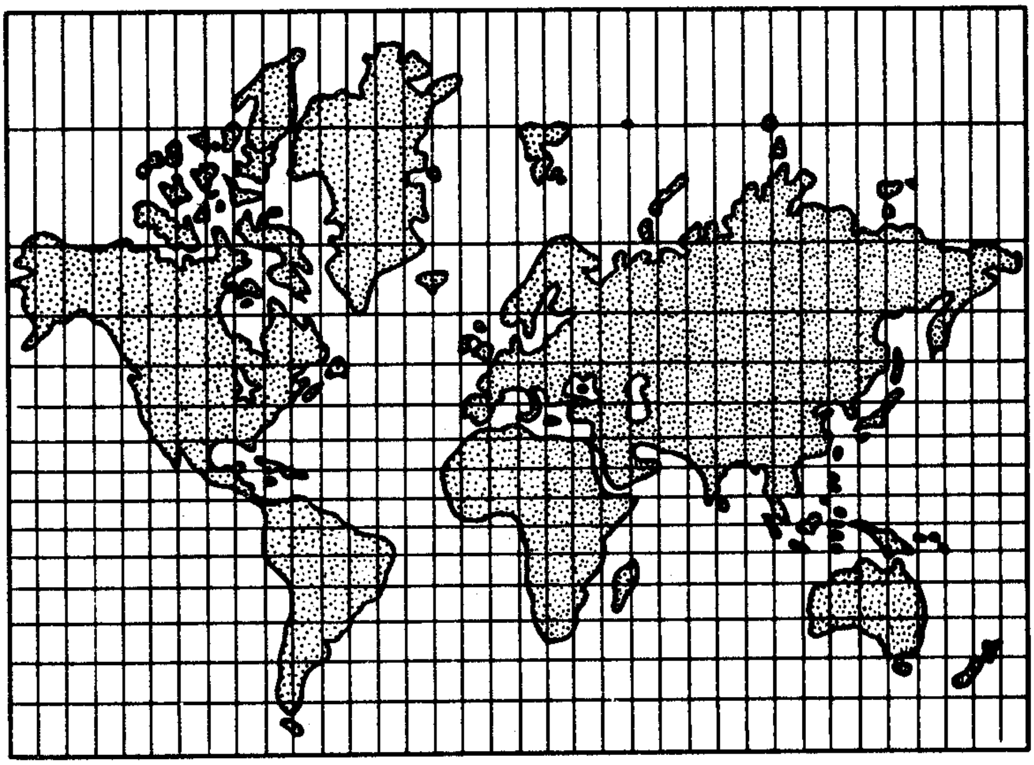
Θα δώσουμε κάποια χαρακτηριστικά γνωρίσματα της σφαιρικής γεωμετρίας. Για διαφωτιστικούς σκοπούς θα την θεωρήσουμε σαν την γεωμετρία της επιφάνειας μιας υδρόγειας σφαίρας. Δεν είναι δύσκολο να αντιληφθούμε ότι δυο ‘ευθείες γραμμές’ σ’ αυτήν την γεωμετρία (πχ δυο μεσημβρινοί) πάντοτε τέμνονται σε δυο αντιδιαμετρικά σημεία της υδρογείου. Επιπλέον το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο του π. Για παράδειγμα, στο τρίγωνο που φράσσεται από το ένα τέταρτο του ισημερινού και από τα τόξα των δυο μεσημβρινών (σχ.1) όλες οι γωνίες του είναι ορθές.[2]

[1] Πρέπει να σημειώσουμε ότι στην προβολική γεωμετρία δεν υπάρχει η έννοια της απόστασης μεταξύ δυο σημείων. Η ερμηνεία των εννοιών ‘ευθεία γραμμή’ και ‘επίπεδο’ δεν εφαρμόζεται σε αυτήν την γεωμετρία.

[2] Η γωνία μεταξύ δυο ευθειών στο σημείο τομής τους ορίζεται ως η γωνία μεταξύ των εφαπτομένων τους στο σημείο αυτό.



σχήμα 1



σχήμα 2

Φυσικά εκτός από τις υδρόγειες σφαίρες στην γεωγραφία χρησιμοποιούνται και χάρτες της γήινης επιφάνειας. Αυτό είναι ισοδύναμο με την μελέτη της σφαιρικής γεωμετρίας θεωρώντας χάρτες της σφαίρας, το οποίο είναι τελείως δυνατό υπό τον όρο ότι έχουμε δείξει πώς θα μετρήσουμε τις πραγματικές γραμμές και τις πραγματικές γωνίες από τις αναπαραστάσεις τους πάνω στο χάρτη, δεδομένου ότι οι τελευταίες είναι παραμορφωμένες και ο χαρακτήρας της παραμόρφωσης δεν είναι ομοιόμορφος πάνω σε ολόκληρο το χάρτη. Ένα είδος χάρτη της γης χρησιμοποιεί την λεγόμενη Μερκατοριανή προβολή[1] (σχ.2). Σ' αυτήν οι μεσημβρινοί προβάλλονται σαν παράλληλες ευθείες και οι κάθετες που αντιστοιχούν στους γεωγραφικούς παράλληλους είναι τέτοιες ώστε το τμήμα που αναπαριστά 1^{o} ενός παραλλήλου έχει το ίδιο μήκος ανεξάρτητα του γεωγραφικού πλάτους. Στην πραγματικότητα όμως το μήκος ενός βαθμού ενός παραλλήλου μικραίνει καθώς αυξάνει το γεωγραφικό πλάτος.

Αφού μια επιφάνεια έχει δυο διαστάσεις, η γεωμετρία που μελετά σχήματα που ανήκουν πάνω σε κάποια επιφάνεια καλείται συνήθως διδιάστατη, και η επιφάνεια η ίδια καλείται διδιάστατος χώρος. Δυο τύποι διδιάστατης γεωμετρίας είναι γνωστά από την αρχαιότητα, η Ευκλείδεια (για το επίπεδο) και η σφαιρική. Οι μαθηματικοί δεν έδωσαν καμιά ιδιαίτερη σημασία στην ύπαρξη διδιάστατης μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, δηλαδή της σφαιρικής γεωμετρίας, για τον απλούστατο λόγο ότι αυτή μελετάται μέσα στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, πράγμα που τους έκανε να μην αναγνωρίσουν τις μη-Ευκλείδειες ιδιότητες της σφαίρας ως τέτοιες.

Σαν αποτέλεσμα των ερευνών του Λομπατσέφσκι ήταν η συνειδητοποίηση ότι όχι μόνο μπορούμε να συλλάβουμε νοητικά την ύπαρξη επιφανειών με μη Ευκλείδειες ιδιότητες, αλλά και τρισδιάστατων μη Ευκλείδειων χώρων.

Η εισαγωγή στην ιδέα της τρισδιάστατης Ευκλείδειας γεωμετρίας μπορεί να μοιάζει με μυστήριο εκτός κι αν δώσουμε τις παρακάτω διευκρινήσεις.

---

[1] Ο Gerhard Mercator (1512-1594) ήταν ένας σπουδαίος Φλαμανδός γεωγράφος. Η προβολή που προτάθηκε απ' αυτόν το 1569 έτυχε καθολικής αποδοχής και οι ναυτικοί χάρτες συντάσσονται με αυτήν από τότε.

Μερικές φορές είναι βολικό να αναπαραστήσουμε τα αποτελέσματα της μελέτης κάποιας κλάσης φαινομένων με μια γεωμετρική μορφή. Τα δεδομένα για παράδειγμα της αύξησης παραγωγικότητας της εργασίας συχνά παρουσιάζονται με μορφή γραφημάτων και διαγραμμάτων. Αυτό δείχνει ότι διάφορες πραγματικές διεργασίες μπορούν να περιγραφούν μέσω γεωμετρικών εικόνων.

Αν ένα γράφημα θεωρηθεί ως ευθεία του Ευκλείδειου επιπέδου τότε προφανώς για την εικόνα του χρησιμοποιείται η διδιάστατη Ευκλείδεια γεωμετρία. Σε ποιο σύνθετες καταστάσεις μπορούμε να καταφύγουμε σε τρισδιάστατες ή ακόμη και σε πολυδιάστατες Ευκλείδειες και μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, χωρίς να σημαίνει ότι όλες αυτές περιγράφουν εκτατικές σχέσεις. Υπάρχουν θεωρίες που χρησιμοποιούν γεωμετρικούς όρους στην τυποποίησή τους, και αυτοί οι όροι, γενικά μιλώντας, δεν έχουν σημασία που να σχετίζεται με έννοιες του χώρου. Έτσι προσθέτοντας τον χρόνο ως τέταρτη διάσταση στις τρεις διαστάσεις του πραγματικού χώρου εισάγουμε την έννοια του τετραδιάστατου χώρου στον οποίο ένα χρονικό διάστημα θεωρείται ως ‘τμήμα ευθείας γραμμής’. Στις περισσότερες περιπτώσεις αυτή η προσέγγιση δημιουργεί μόνο την εμφάνιση μιας εικόνας, ωστόσο διευκολύνει την ανάλυση των φαινομένων σε κάποιο βαθμό όταν αυτά μελετώνται μ’ αυτήν την μέθοδο.

Έτσι η κατασκευή της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι δικαιολογημένη από τη δυνατότητα εφαρμογής των συμπερασμάτων της σε πραγματικά αντικείμενα. Το γεγονός ότι αυτά τα συμπεράσματα είναι εκφρασμένα σε γεωμετρική γλώσσα δεν έχει πραγματικές συνέπειες. Δεν είναι δύσκολο να τροποποιήσουμε την γεωμετρική τυποποίηση ώστε αυτή να αντιστοιχεί σε ιδιότητες των αντικειμένων και των φαινομένων του ζητήματος που μας απασχολεί.

Η αντικατάσταση κάποιων εννοιών από άλλες να σημειώσουμε ότι είναι μια κοινή πρακτική στα εφαρμοσμένα μαθηματικά όπου μια θεωρία μπορεί να περιγράφει ποιοτικώς διαφορετικά αντικείμενα τα οποία όμως κυβερνώνται από τους ίδιους μαθηματικούς νόμους[1].

Οι τρισδιάστατες γεωμετρίες απαιτούν ειδική προσοχή. Ανεξαρτήτως από τις άλλες εφαρμογές τους αυτές μπορούν να ιδωθούν ως υποθέσεις που αξιώνουν να περιγράψουν τις ιδιότητες του πραγματικού χώρου. Ποια είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα είναι ένα πρόβλημα το οποίο μπορεί να λυθεί μόνο με το πείραμα.

Αλλά ας σημειώσουμε το ακόλουθο γεγονός, το οποίο είναι σημαντικό για την παραπέρα παρουσίαση. Ένας χάρτης του Λομπατσέφσκιου επιπέδου μπορεί να κατασκευαστεί πάνω στο Ευκλείδειο επίπεδο, και με περισσότερους από έναν τρόπους, ακριβώς όπως έγινε και στην περίπτωση της σφαίρας. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση ενός τέτοιου χάρτη σαν βάση για την μελέτη της υπερβολικής γεωμετρίας που θα κάνουμε εδώ.

Η γεωμετρία Λομπατσέφσκι έτυχε γενικής αναγνώρισης στις ακόλουθες περιστάσεις. Το 1868 ο Ιταλός γεωμέτρης Eugenio Beltrami (1835-1900) μελέτησε μια επιφάνεια του Ευκλείδειου χώρου η οποία έχει τις ιδιότητες του Λομπατσέφσκιου επιπέδου, ή καλύτερα κάποιου τμήματος αυτού του επιπέδου (αν η συντομότερη γραμμή πάνω στην επιφάνεια θεωρηθεί ως «ευθεία γραμμή»). Αυτή η έρευνα, η οποία λίγο αργότερα οδήγησε σε διάφορους χάρτες του Λομπατσέφσκιου επιπέδου, έπεισε τους επιστήμονες για την ορθότητα των ιδεών του Ρώσου γεωμέτρη δίνοντας την ώθηση για βαθύτερη σπουδή του έργου του και παρακίνησε το ξεκίνημα πολλών ερευνών στο πεδίο των μη-Ευκλείδειων γεωμετριών.

Η εξερεύνηση των μη-Ευκλείδειων γεωμετριών θέτει ένα εξαιρετικά σύνθετο πρόβλημα στους φυσικούς, αυτό της εξήγησης αν ο φυσικός χώρος είναι Ευκλείδειος όπως πιστεύαμε νωρίτερα,

[1] Για την πρακτική εφαρμογή αυτών των αρχών δες την παράγραφο πάνω στις προσομοιώσεις στο V.G. Boltyansky's *Differentiation Explained* (Mir Publishers, Moscow).

και αν όχι σε ποιόν τύπο μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας ανήκει[1]. Για να απαντήσουμε σ' αυτό είναι αναγκαίο να τσεκάρουμε την εγκυρότητα των αξιωμάτων πειραματικά, εφόσον καταστεί σαφές ότι με την βελτίωση των οργάνων μέτρησης η αξιοπιστία των πειραματικών δεδομένων θα αυξηθεί και μαζί της η δυνατότητα διείσδυσης σε λεπτομέρειες οι οποίες διέφυγαν από την προσοχή παλαιότερων ερευνητών.

Έτσι ο Λομπατσέφσκι έφερε την γεωμετρία πίσω σε μια υλική ερμηνεία των αξιωμάτων της ως προτάσεων που εισηγούνται βασικές γεωμετρικές ιδιότητες του χώρου, θεωρούμενες από την ανθρωπότητα ως πειραματικά αποτελέσματα.

Ακόμη δεν μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα της γεωμετρικής δομής του φυσικού χώρου πλήρως λυμένο. παρόλα αυτά μπορούμε να σημειώσουμε ότι στην μοντέρνα θεωρία της σχετικότητας ο πραγματικός χώρος θεωρείται στη βάση ενός αριθμού δεδομένων που είναι μη Ευκλείδεια και έχουν γεωμετρικές ιδιότητες πολύ πιο σύνθετες απ' αυτές του Λομπατσέφσκιου χώρου. Ένα από τα βαρύτερα πλήγματα στην πίστη της Ευκλείδειας δομής του πραγματικού χώρου προήλθε από την ανακάλυψη του φυσικού νόμου ότι δεν υπάρχει ταχύτητα που να ξεπερνάει την ταχύτητα του φωτός.

Τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα που κανείς ακούει συχνά, δηλαδή ποια από τις δυο γεωμετρίες, του Ευκλείδη ή του Λομπατσέφσκι είναι η αληθινή.

Παρόμοιο ερώτημα δεν τίθεται όσον αφορά την διδιάστατη Ευκλείδεια και την σφαιρική γεωμετρία. Αμφότερες είναι αληθείς αλλά η καθεμιά έχει διαφορετική σφαίρα εφαρμογών. Οι τύποι της σφαιρικής γεωμετρίας δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για επίπεδα σχήματα όπως και οι τύποι της διδιάστατης Ευκλείδειας γεωμετρίας δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σχήματα πάνω

---

[1] Στην θεώρηση αυτού του προβλήματος, η πιθανότητα ο πραγματικός χώρος να είναι όντως μη ομοιόμορφος δηλαδή η γεωμετρική του δομή να είναι διαφορετική στα διάφορα σημεία του, δεν πρέπει να παραμεληθεί.

στη σφαίρα. Το ίδιο είναι αληθές και για τις τρισδιάστατες γεωμετρίες. Καθεμιά απ' αυτές είναι λογικά συνεπής και έχει τις εφαρμογές της σε κάποιο πεδίο όχι αναγκαία γεωμετρικού χαρακτήρα, αλλά θα πρέπει να ακυρωθεί αν της αποδοθεί ένας καθολικός χαρακτήρας.

Το πρόβλημα της γεωμετρικής δομής του πραγματικού χώρου, όπως έχουμε σημειώσει εμπίπτει στο πεδίο της φυσικής και δεν μπορεί να λυθεί μέσω της καθαρής γεωμετρίας. Η ιδιαιτερότητά του, παρεμπίπτοντος, είναι ότι καμιά γεωμετρία δεν αναπαριστά τις χωρικές σχέσεις με απόλυτη ακρίβεια. Η μοριακή δομή της ύλης, για παράδειγμα, αποκλείει την ύπαρξη στερεών με διαστάσεις αντιληπτές με την αφή τα οποία να έχουν τις ιδιότητες της ιδεατής σφαίρας. Επομένως η εφαρμογή των γεωμετρικών κανόνων για την λύση προβλημάτων υλικής υπόστασης μας παρέχει μόνο προσεγγιστικά αποτελέσματα. Έτσι η αντίληψή μας για την γεωμετρική δομή του πραγματικού χώρου συνοψίζεται στην επιστημονικά δικαιολογημένη πεποίθηση ότι μια γεωμετρία μας δίνει καλύτερη περιγραφή των σχέσεων του πραγματικού χώρου από τις άλλες.

Αν και η θεωρία της σχετικότητας χρησιμοποιεί τύπους της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας αυτό δεν σημαίνει ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία θα πρέπει να απορριφθεί , όπως συμβαίνει με την αστρονομία, την αλχημεία και κάποιες ψευδοεπιστήμες σαν κι αυτές. Και οι δυο γεωμετρίες είναι εργαλεία για την εξερεύνηση χωρικών μορφών, αλλά η μη-Ευκλείδεια επιτρέπει να γίνουν λεπτότερες μελέτες, ενώ η Ευκλείδεια είναι ανεπαρκής για την επίλυση πολλών πρακτικά σημαντικών προβλημάτων τα οποία απαιτούν υψηλό βαθμό ακρίβειας. Ταυτόχρονα επειδή χαρακτηρίζεται από μεγάλη απλότητα η ευρεία εφαρμογή της είναι μονίμως εγγυημένη.

Για να κλείσουμε αυτήν την σύντομη σκιαγράφηση ας σημειώσουμε τις νέες ιδέες που εισήγαγε ο Λομπατσέφσκι στην ανάπτυξη της γεωμετρίας.

Η επιστημονική συμβολή αυτού του σπουδαίου στοχαστή δεν περιορίζεται μόνο στην αποκάλυψη του χιλιόχρονου μυστηρίου του αξιώματος των παραλλήλων αλλά η σημασία του έργου του ήταν ασύγκριτα μεγαλύτερη.

Υποβάλλοντας ένα από τα αξιώματα του Ευκλείδη σε κριτική ανάλυση ο Λομπατσέφσκι έθεσε τις βάσεις για την επανεξέταση κάποιων αρχικών προτάσεων του Ευκλείδειου συστήματος οι οποίες μεταγενέστερα οδήγησαν στην ανάπτυξη αυστηρών επιστημονικών αρχών για την αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας και άλλων μαθηματικών κλάδων.

Οι ανακαλύψεις του Λομπατσέφσκι στην υπερβολική γεωμετρία ελευθέρωσαν την επιστήμη των χωρικών μορφών από τα στενά πλαίσια του Ευκλείδειου συστήματος. Η γεωμετρία του είχε άμεσες εφαρμογές στην θεωρία των ορισμένων ολοκληρωμάτων και σε άλλους μαθηματικούς τομείς.

Ο Λομπατσέφσκι ξεκίνησε την διαπραγμάτευση προβλημάτων που δεν είχαν εγείρει προηγούμενοι μαθηματικοί, συμπεριλαμβανομένου κι αυτό της γεωμετρικής δομής του πραγματικού χώρου. Δίχως αυτήν ,η θεωρία της σχετικότητας , ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της μοντέρνας φυσικής, δεν θα ήταν εύκολο να αναπτυχθεί. Παίρνοντας τις έρευνες του Λομπατσέφσκι για ξεκίνημα οι επιστήμονες οικοδόμησαν μια θεωρία η οποία δίνει τη δυνατότητα να αναλύει τις διεργασίες που λαμβάνουν χώρα στον πυρήνα του ατόμου.

Εν κατακλείδι ας σημειώσουμε την γνωσιολογική συνεισφορά[1] των ιδεών αυτού του μεγάλου Ρώσου μαθηματικού. Πριν τον Λομπατσέφσκι η γεωμετρία κυριαρχείτο για αιώνες από την ιδεαλιστική οπτική γωνία που πρωτοξεκίνησε από το Έλληνα φιλόσοφο Πλάτωνα. Αποδίδοντας στα αξιώματα του Ευκλείδη έναν απόλυτο χαρακτήρα ο Πλάτωνας αρνήθηκε την εμπειρική τους αρχή. Ο Λομπατσέφσκι αποφασιστικά γκρέμισε αυτή την προοπτική και επανάφερε την γεωμετρία σε μια υλιστική θέση.

[1] Γνωσιολογία-η επιστήμη της νόησης