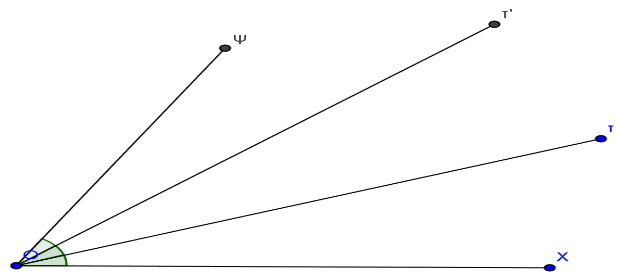
Γιώργος Κασαπίδης

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ MORLEY

Ένα από τα ποιο εκπληκτικά θεωρήματα της στοιχειώδους Γεωμετρίας ανακαλύφτηκε γύρω στο 1899 από τον Morley , ο οποίος το ανέφερε στους φίλους του κι εκείνοι το διέδωσαν σ' όλο τον κόσμο με την μορφή «μαθηματικού κουτσομπολιού».

Μετά από δέκα χρόνια μια τριγωνομετρική απόδειξη δόθηκε από τον M Satyanarayana και μια στοιχειώδης απόδειξη από τον M.T. Naraniengar.

<u>Ορισμός 1.</u> Έστω γωνία χΟψ. Ονομάζουμε **τριχοτόμο** προσκείμενη στην πλευρά Οχ, την εσωτερική ημιευθεία Οτ της χΟψ για την οποία ισχύει $\angle\chi O\tau = \frac{1}{3}\angle\chi O\psi$ (σχ.1)



Σχ.1

Όμοια ορίζεται και η τριχοτόμος Οτ΄ που είναι προσκείμενη στην γωνία Οψ.

Παρατήρηση 1: Κάθε γωνία έχει δυο τριχοτόμους, μια προσκείμενη στην μια πλευρά της και μια προσκείμενη στην άλλη.

Γενικά οι τριχοτόμοι δεν μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη, μπορούν όμως να κατασκευαστούν με άλλους τρόπους (π.χ. με νεύση)

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε <u>τρεις αποδείξεις</u> της παρακάτω πρότασης που στη διεθνή βιβλιογραφία αποκαλείται θεώρημα Morley: **Οι τριχοτόμοι που είναι προσκείμενες στις πλευρές ενός τριγώνου, τέμνονται ανα δυο, ορίζοντας ισόπλευρο τρίγωνο.**

<u>Το θεώρημα Morley</u> Οι τριχοτόμοι που είναι προσκείμενες στις πλευρές ενός τριγώνου, τέμνονται ανα δυο, ορίζοντας ισόπλευρο τρίγωνο.

Απόδειξη 1η (τριγωνομετρική)

Λήμμα 1: Για κάθε χ∈ℝ ισχύει: $4\eta\mu\frac{x}{3}\eta\mu\frac{\pi+\chi}{3}\eta\mu\frac{2\pi+\chi}{3}=\eta\mu\chi$

Απόδειξη

$$4\eta\mu\frac{x}{3}\eta\mu\frac{\pi+\chi}{3}\eta\mu\frac{2\pi+\chi}{3}=2\eta\mu\frac{\chi}{3}(2\eta\mu\frac{\pi+\chi}{3}\eta\mu\frac{2\pi+\chi}{3})=$$

$$2\eta\mu\frac{\chi}{3}[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+\chi-2\pi-\chi}{3}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+\chi+2\pi+\chi}{3}]=$$

$$2\eta\mu\frac{\chi}{3}[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu(\pi+\frac{2\chi}{3})]=2\eta\mu\frac{\chi}{3}[\frac{1}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{2\chi}{3}]=$$

$$\eta\mu\frac{\chi}{3}+2\eta\mu\frac{\chi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{2\chi}{3}=\eta\mu\frac{\chi}{3}+\eta\mu\frac{\chi+2\chi}{3}+\eta\mu\frac{\chi-2\chi}{3}=$$

$$\eta\mu\frac{\chi}{3}+\eta\mu\chi-\eta\mu\frac{\chi}{3}=\eta\mu\chi.$$

Λήμμα 2: Αν Α+Β+Γ=π τότε $\eta\mu^2\frac{\pi+B}{3}+\eta\mu^2\frac{\pi+\Gamma}{3}-2\eta\mu\frac{\pi+B}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}=\eta\mu^2\frac{A}{3}$

Απόδειξη

$$\eta\mu^2\frac{\pi+B}{3}+\eta\mu^2\frac{\pi+\Gamma}{3}-2\eta\mu\frac{\pi+B}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}=$$

$$\frac{1}{2}[1-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+2B}{3}+1-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+\Gamma}{3}]-2\eta\mu\frac{\pi+B}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}=$$

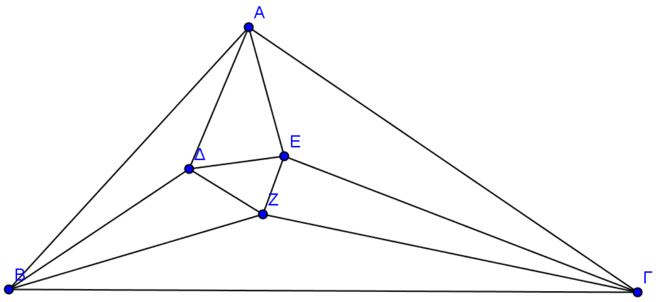
$$\frac{1}{2}[2-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+2B}{3}-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi-2\Gamma}{3}]-[\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{3}-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+B+\Gamma}{3}]\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}=$$

$$1-\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+2B}{3}-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+2\Gamma}{3}-\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}+\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+B+\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}=$$

$$1-\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma+A}{3}+\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma-A}{3}]+\sigma\upsilon\nu(\pi-\frac{A}{3})\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}=$$

$$1-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi+2B}{3})-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi+2\Gamma}{3})-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi-2\Gamma}{3})-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(\frac{2B-\pi}{3})+\sigma\upsilon\nu(\pi-\frac{A}{3})\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}=$$

$$1+\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\pi-\frac{\mathrm{A}}{3})+\sigma\upsilon\nu(\pi-\frac{2\mathrm{A}}{3})]=1+\sigma\upsilon\nu(\pi-\frac{\mathrm{A}}{3})\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{3}=1-\sigma\upsilon\nu^2\frac{\mathrm{A}}{3}=\eta\mu^2\frac{\mathrm{A}}{3}.$$



Περνάμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος

Στο τρίγωνο ΑΒΔ από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{3}}=\frac{\mathrm{AB}}{\eta\mu(\pi-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{3})}\Rightarrow \mathrm{A\Delta}=\frac{\mathrm{AB}\,\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{3}}{\eta\mu(\frac{2\pi+\Gamma}{3})}\Rightarrow \mathrm{A\Delta}=\frac{2R\eta\mu\Gamma\,\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{3}}{\eta\mu\frac{2\pi+\Gamma}{3}}$$

Άρα $\mathrm{A\Delta}=\dfrac{8R\eta\mu\frac{\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\eta\mu\frac{2\pi+\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{3}}{\eta\mu\frac{2\pi+\Gamma}{3}}$ και τελικά $\mathrm{A\Delta}=8R\eta\mu\frac{\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{3}$

Ομοίως βρίσκουμε:

$$\mathrm{AE}=8R\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{3}\eta\mu\frac{\pi+\mathrm{B}}{3}\eta\mu\frac{\Gamma}{3}$$

$$\mathrm{B\Delta}=8R\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\Gamma}{3}$$

$$\Gamma\mathrm{Z}=8R\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{3}\eta\mu\frac{\pi+\mathrm{A}}{3}\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{3}$$

$$\mathrm{BZ} = 8R\eta\mu\frac{\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\pi+\mathrm{A}}{3}\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{3}$$

$$\Gamma\mathrm{E} = 8R\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{3}\eta\mu\frac{\pi+\mathrm{B}}{3}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{3}$$

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta\mathrm{E}^2 = \mathrm{A}\Delta^2 + \mathrm{AE}^2 - 2\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{AE}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{3} \quad \text{άρα}$$

$$\Delta\mathrm{E}^2 = 64R^2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{3}\eta\mu^2\frac{\mathrm{B}}{3}\eta\mu^2\frac{\pi+\Gamma}{3} + 64R^2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{3}\eta\mu^2\frac{\mathrm{B}}{3}\eta\mu^2\frac{\pi+\mathrm{B}}{3} - 128R^2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{3}\eta\mu^2\frac{\mathrm{B}}{3}\eta\mu\frac{\pi+\mathrm{B}}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{3}$$

$$= 64R^2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{3}\eta\mu^2\frac{\mathrm{B}}{3}[\eta\mu^2\frac{\pi+\Gamma}{3} + \eta\mu^2\frac{\pi+\mathrm{B}}{3} - 2\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\pi+\mathrm{B}}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{3}]$$

$$= 64R^2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{3}\eta\mu^2\frac{\mathrm{B}}{3}\eta\mu^2\frac{\mathrm{A}}{3}$$ κι έτσι τελικά θα έχουμε:

$$\Delta\mathrm{E} = 8R\eta\mu\frac{\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{3}\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{3}$$

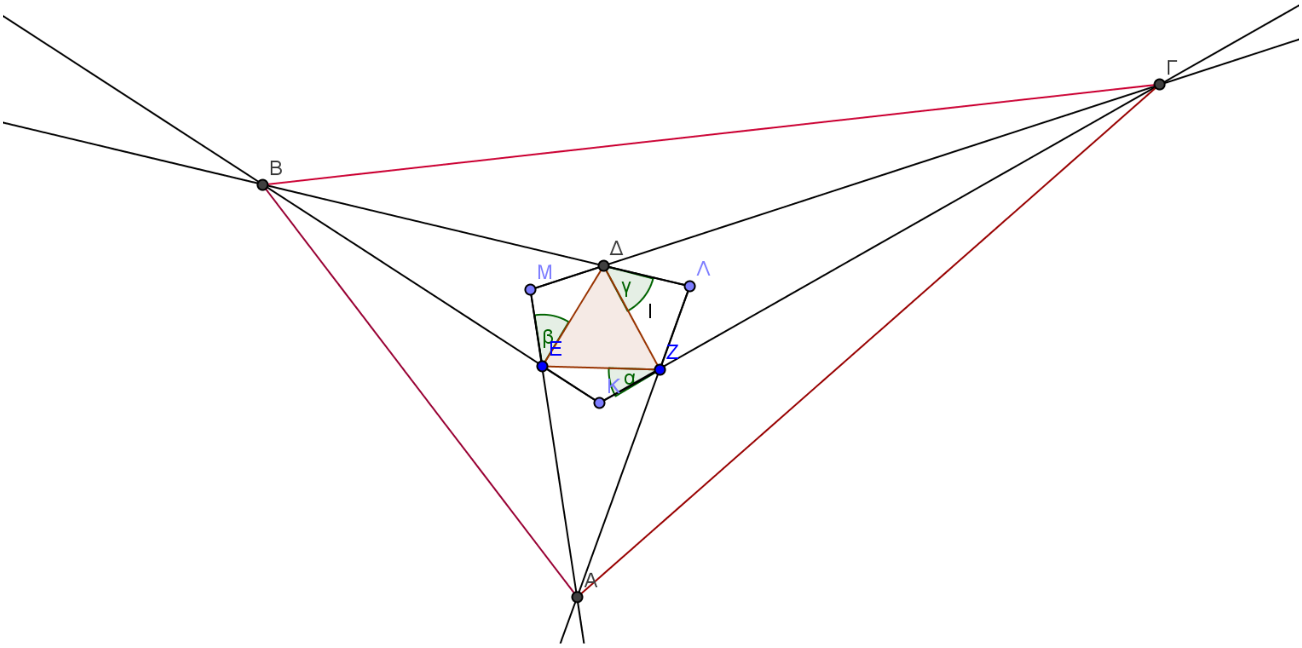
Η παραπάνω έκφραση είναι συμμετρική ως προς Α,Β,Γ άρα μένει αμετάβλητη κατά τον υπολογισμό των ΔΖ, ΕΖ και ΕΔ . Συνεπώς το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

Γιώργος Κασαπίδης

<u>2η απόδειξη</u>

Πολλές μαθηματικές αποδείξεις (όπως η παραπάνω) είναι μακροσκελείς και πολύπλοκες. Άλλες πάλι είναι μικρές αλλά πολύ έξυπνα κατασκευασμένες. Τέτοιου είδους είναι η δεύτερη απόδειξη που θα δώσουμε για το θεώρημα Morley.

Η βασική ιδέα είναι να ξεκινήσουμε αντίστροφα από ένα ισόπλευρο τρίγωνο και να κατασκευάσουμε ένα άλλο τρίγωνο όμοιο προς το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ.



|Πάνω στις πλευρές ΕΖ,ΕΔ,ΔΖ κατασκευάζουμε ισοσκελή τρίγωνα ΚΕΖ,ΜΕΔ ,ΛΖΔ ώστε οι γωνίες των βάσεών τους να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\alpha+\beta+\gamma=120^0 \text{ και } \alpha<60^0, \beta<60^0, \gamma<60^0.$$

Προεκτείνουμε τις πλευρές αυτών των ισοσκελών κάτω από τις βάσεις τους μέχρι να συναντηθούν στα σημεία Α,Β,Γ.

Αφού $\alpha+\beta+\gamma+60^0=180^0$ αναφερόμενοι στο παραπάνω σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιες γωνίες ακόμη όπως πχ $\angle \mathrm{ΚΕΑ}=\gamma$, $\angle \mathrm{ΕΑΖ}=60^0-\alpha$, $\angle \mathrm{ΔΓΖ}=60^0-\gamma$, $\angle \mathrm{ΕΒΔ}=60^0-\beta$.

Επίσης $\angle \mathrm{ΑΖΓ}=180^0-\beta=90^0+90^0-\beta=90^0+\angle\frac{\mathrm{ΑΜΓ}}{2}$. Η ΜΖ (ως διάμεσος των ΜΕΔ,ΕΔΖ) είναι διχοτόμος της $\mathrm{ΑΜΓ}$ και αφού $\mathrm{ΑΖΓ}=90^0+\frac{\mathrm{ΑΜΓ}}{2}$ το Ζ θα είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΜΓ. Όμοια τα σημεία Ε,Δ είναι τα έγκεντρα των τριγώνων ΒΛΑ και ΒΓΚ. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε μια απο τις κορυφές Α,Β,Γ οι τρεις μικρές γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες μεταξύ τους.

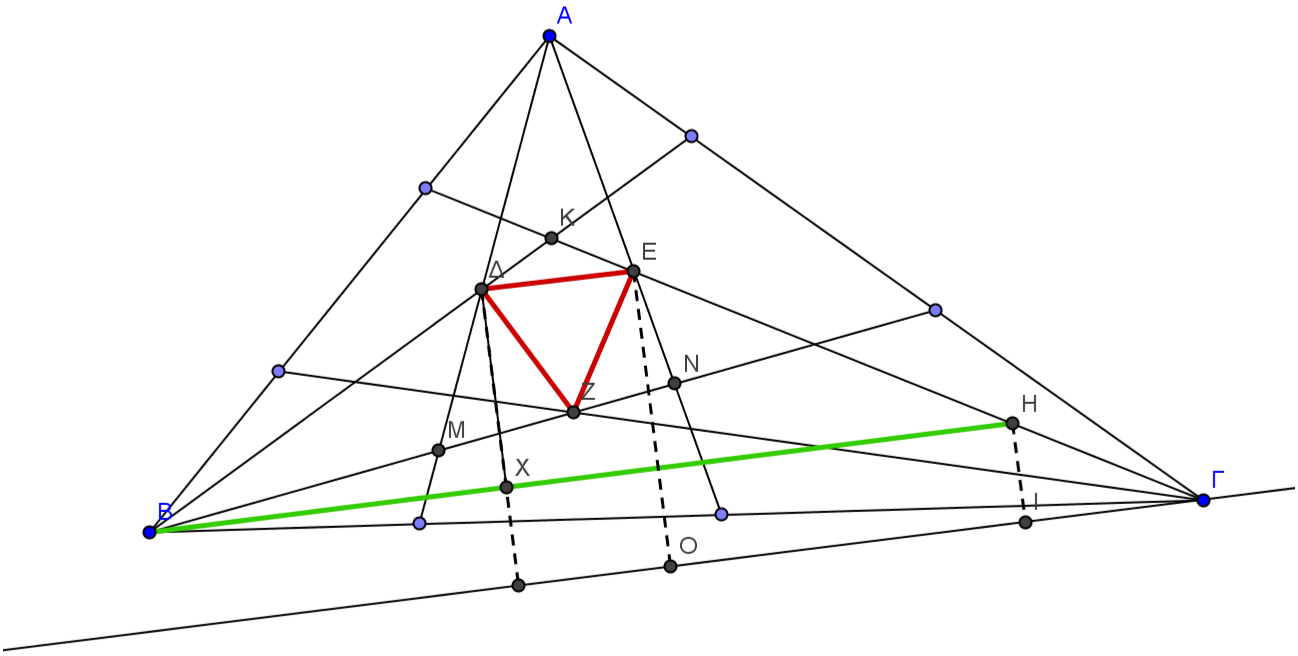
Έτσι $\mathrm{ΕΑΒ}=\frac{1}{3}\mathrm{Α}=60^0-\alpha=\mathrm{ΕΑΖ}=\mathrm{ΕΖΑ}$

$$\text{ΑΖΓ} = \frac{1}{3}\Gamma = \text{ΖΓΔ} = \text{ΔΓΒ} \ , \ \text{ΔΒΓ} = \frac{1}{3}\text{Β} = \text{ΔΒΕ} = \text{ΕΒΑ}$$

Άρα $\alpha = 60^0 - \frac{1}{3}\text{Α}$, $\beta = 60^0 - \frac{1}{3}\text{Β}$, $\gamma = 60^0 - \frac{1}{3}\Gamma$

Διαλέγοντας για τις α,β,γ τις παραπάνω τιμές και κάνοντας την παραπάνω κατασκευή , καταλήγουμε σε τρίγωνο προφανώς όμοιο με το δοσμένο αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ.

3η απόδειξη



Θεωρούμε σημείο Η του τμήματος ΚΓ τέτοιο ώστε ΚΗ=ΚΒ και μια ευθεία Γψ//ΒΗ. Προβάλουμε τα σημεία Ε και Η στην Γψ και το σημείο Δ στην ΒΗ και στην Γψ. Τότε από τα όμοια τρίγωνα ΒΧΔ, ΕΟΓ και ΗΙΓ θα έχουμε:

$$\frac{\Delta\text{Χ}}{\Delta\text{Β}} = \frac{\text{ΕΟ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΗΙ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{\text{ΕΟ} - \text{ΗΙ}}{\text{ΕΓ} - \text{ΗΓ}} = \frac{\Delta\text{Χ}}{\text{ΕΗ}}$$

Επομένως θα έχουμε ΕΗ=ΔΒ κι έτσι από τη σχέση ΚΒ=ΚΗ προκύπτει ότι ΚΕ=ΚΔ. Το Ζ είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΒΓΚ οπότε τα τρίγωνα ΚΖΔ και ΚΕΖ θα είναι ίσα , άρα ΖΔ=ΖΕ. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι ΔΖ=ΔΕ.

Βιβλιογραφία

1. **H. S. M. COXETER Introduction to Geometry Second Edition**
2. **ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ Φ ΠΑΛΛΑ Μεγάλη Τριγωνομετρία**
3. **http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtm**