ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο Διόφαντος ήταν ένας Έλληνας μαθηματικός που έζησε και έδρασε περί τα μέσα του 3ου αι. μΧ. Ελάχιστες πληροφορίες υπάρχουν για τη ζωή του. Γνωρίζουμε ότι έζησε στην Αλεξάνδρεια, παντρεύτηκε και απέκτησε ένα γιο, και πέθανε σε ηλικία ογδόντα τεσσάρων ετών, όπως προκύπτει από ένα σχετικό επίγραμμα. Ήταν μεταγενέστερος του Υψικλή (1ος αι. μ.Χ), τον οποίο αναφέρει στο έργο του *Περί πολυγώνων αριθμών*, και προγενέστερος της Υπατίας (4ος-5ος αι. μ.Χ.), η οποία συνέγραψε, σύμφωνα με το λεξικό της Σούδας, σχόλια (μη σωζόμενα) στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου.

Τα Αριθμητικά είναι το πρώτο σύγγραμμα άλγεβρας. Σε αυτό ο Διόφαντος, κατά το πρότυπο των στοιχείων του Ευκλείδη, επιχειρεί μια σύνοψη της ελληνικής αριθμητικής (αργότερα ονομαζόμενης από τους Άραβες ως άλγεβρας) σε δεκατρία βιβλία, μέσα από κάποια προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις ή συστήματα. Από τα βιβλία αυτά έχουν σωθεί δέκα. Τα έξι είναι στα ελληνικά, ενώ τα τέσσερα σε αραβική μετάφραση και βρέθηκαν το 1971 στο Ιράν.

Ο πρώτος (μη σωζόμενος) σχολιασμός των Αριθμητικών οφείλεται στην Υπατία κόρη του μαθηματικού Θέωνος του Αλεξανδρέως. Σχόλια έγραψαν επίσης ο Μιχαήλ Ψελλός (11 αι.), ο Γεώργιος Παχυμέρης (13 αι.) και ο Μαξιμος Πλανούδης (13 αι.) Οι Άραβες κατά τη συνήθειά τους ασχολήθηκαν και μετάφρασαν τα Αριθμητικά. Στην δυτική Ευρώπη μετά τον 12ο αι. Τα έργα των Αράβων άρχισαν να γίνονται γνωστά, ενώ ταυτόχρονα άρχισε και μια μελέτη των αρχαίων ελληνικών έργων. Έτσι έργα όπως του γνωστού Leonardo (Fibonazzi) της Πίζας στην Ιταλία, περιέχουν μεγάλο αριθμό από τα προβλήματα του Διόφαντου, χωρίς όμως να αναφέρεται το όνομά του. Αυτό άρχισε να εμφανίζεται πρώτα σε επιστολή του Muller από το Καίνιξμπεργκ προς τον αστρονόμο Bianchini. Επίσης ο Ιταλός Bombelli στην εισαγωγή της άλγεβράς του αναφέρει ότι ο φίλος του Pazzi του έδειξε στη βιβλιοθήκη του Βατικανού το ελληνικό σύγγραμμα κάποιου “Διόφαντου”, μέρος του οποίου μετέφρασε και συμπεριέλαβε στην άλγεβρά του. Το 1575 ο Ελληνιστής Holzmann (Xylander, Ξύλανδρος) δημοσίευσε Λατινική μετάφραση των Αριθμητικών με βάση χειρόγραφο του Γερμανού πρέσβη στην Πολωνία A. Dudicius. Η πρώτη Γαλλική μετάφραση έγινε το 1621 από το μαθηματικό C.G. Bachet, με σπουδαίο σχολιασμό. Δεύτερη έκδοση έγινε στα 1670 από τον S. Fermat, η οποία περιλαμβάνει και τα σχόλια του P. Fermat τα οποία άφησαν εποχή, πυροδοτώντας πολλές και βαθιές έρευνες στη θεωρία αριθμών από πολύ μεγάλους μαθηματικούς όπως πχ ο Euler. Η τρίτη και πληρέστερη Γαλλική έκδοση οφείλεται στον P. Tannery (Λειψία 1893-95). Η πρώτη έκδοση στην Ελληνική γλώσσα έγινε το 1963 από τον μαθηματικό Ευάγγελο Σταμάτη.

Όλα τα παραπάνω είναι αυτά που λίγο πολύ μπορεί να βρει ο καθένας, είτε σε εισαγωγές βιβλίων σχετικών με το έργο του Διόφαντου, είτε από την αναζήτηση γενικών ιστορικών πληροφοριών σε σχετικές πηγές και μου ήταν γνωστά εδώ και αρκετά χρόνια. Επίσης μια γενική “γεύση” από τα Αριθμητικά είχα μελετώντας κάποια προβλήματα των Αριθμητικών από σύγχρονη όμως μετάφραση και προσέγγιση, δηλαδή μέσω μοντέρνας μαθηματικής γραφής. Από εκείνες τις πρώτες μελέτες εντόπισα δυο αντιφάσεις.

Η πρώτη αφορά το όνομα ενός κλάδου της θεωρίας αριθμών, τις **Διοφαντικές εξισώσεις**. Μια Διοφαντική εξίσωση είναι είναι μια πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές, με έναν ή περισσότερους αγνώστους, και για την οποία αναζητούμε ακέραιες λύσεις. Η ονομασία “Διοφαντικές” παραπέμπει στο Διόφαντο ο οποίος, όπως ανέφεραν πολλά από τα βιβλία αριθμοθεωρίας που διάβαζα, ήταν ο πρώτος που απαιτούσε και αναζητούσε **ακέραιες λύσεις** τέτοιων εξισώσεων. Όμως όσο κι αν έψαξα στα Αριθμητικά δεν βρήκα σχεδόν πουθενά κάτι που να στηρίζει κάτι τέτοιο. Αυτό που είναι εξαρχής φανερό στα Αριθμητικά είναι ότι ο Διόφαντος **αναζητάει ρητές και όχι ακέραιες λύσεις** εξισώσεων.

Η δεύτερη αφορά την πεποίθηση που είχα διαμορφώσει, ότι ο Διόφαντος **γνώριζε τους αρνητικούς αριθμούς.** Αυτή η πεποίθηση ήταν προϊόν αναγνωσμάτων που υποστήριζαν την άποψη αυτή και βασίζονταν στο γεγονός ότι στην εισαγωγή των Αριθμητικών ο Διόφαντος γράφει: ***“Λείψις επί λείψιν πολλαπλασιασθείσα ποιεί ύπαρξιν, λείψις δε επί ύπαρξιν ποιεί λείψιν, και της λείψεως σημείον Ψ ελλιπές κάτω νεύον***. ⋔ Ωστόσο, σε κανένα από τα προβλήματα δεν είδα ο Διόφαντος να βρίσκει αρνητικές λύσεις, παρά μόνο θετικές και ρητές. Επίσης σε κανένα πρόβλημα σύμφωνα με την πηγή [1] δεν χρησιμοποιεί αρνητικό αριθμό, ενώ όπου θα έπρεπε να γίνει κάτι τέτοιο, αποφεύγει να τον βρει, βρίσκοντας κατευθείαν τη θετική δύναμή του. (ΣΤ-16, Ε-7-12 Αραβικών).

Έτσι αποφάσισα να διαβάσω τα Αριθμητικά λίγο πιο προσεκτικά και από το πρωτότυπο. (Λέγοντας πρωτότυπο εννοώ κείμενο στα αρχαία ελληνικά. Το αρχαιότερο ελληνικό κείμενο των Αριθμητικών που διαθέτουμε σήμερα είναι του 13ου αι. και είναι προφανώς προϊόν αλλεπάλληλων αντιγραφών.) Στο εγχείρημα αυτό, δυστυχώς το ομολογώ, ελάχιστα με βοήθησαν τα έξι χρόνια αρχαίων ελληνικών που διδάχτηκα στο γυμνάσιο και στο λύκειο, όπως όλοι οι Ελληνόπαιδες. Το ισχυρό κίνητρο που είχα ως Μαθηματικός, να μπορέσω να κατανοήσω το κείμενο, στάθηκε ικανό για να καταφέρω να προχωρήσω τη μελέτη μου, και να ξεπεράσω τις διάφορες δυσκολίες. Στην κατεύθυνση αυτή με βοήθησαν πολύ οι πηγές [1], [2]. Με κάθε ειλικρίνεια σας διαβεβαιώνω ότι η ανάγνωση από το πρωτότυπο μπορεί να γίνει μια πραγματικά προκλητική και απολαυστική εμπειρία, που μπορεί να σας ταξιδεύσει κρατώντας αμείωτο το ενδιαφέρον σας.

Στην εργασία που ακολουθεί παρουσιάζω **επτά προβλήματα των Αριθμητικών**, τα οποία επέλεξα για να δείξω το δρόμο που άνοιξε ο Διόφαντος με το έργο του, και που οδηγεί μέχρι και στις μέρες μας, σε σημαντικά πεδία έρευνας και δράσης στη θεωρία των αριθμών. Για κάθε ένα από τα επιλεγμένα προβλήματα, παρουσιάζω **το αρχαίο κείμενο με τη μετάφρασή του**, παράγραφο παράγραφο, ώστε να είναι ευκολότερη η ανάγνωσή του. Στη συνέχεια παρουσιάζω τη λύση γραμμένη σε **σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό**, πράγμα νομίζω πολύ χρήσιμο για τους σημερινούς νέους αναγνώστες. Τέλος όπου είναι δυνατό, δίνω **γενικές λύσεις** στα επιλεγμένα προβλήματα ή **σχόλια** που αφορούν έρευνες που έγιναν ή εξακολουθούν να γίνονται γύρω από αυτά τα προβλήματα. Στο πλαίσιο αυτό δίνονται δυο **αποδείξεις** του περίφημου μεγάλου θεωρήματος του **Fermat για τον εκθέτη ν=4**, και γίνεται μια αναφορά στη θεωρία των **ελλειπτικών καμπυλών**, καθώς και μια βαθύτερη μελέτη μιας συγκεκριμένης ελλειπτικής καμπύλης.

Συνοψίζοντας, “Ο Δρόμος του Διόφαντου” είναι η αφήγηση ενός ταξιδιού μέσα στο χρόνο και στον κόσμο των Μαθηματικών, βασισμένου σε προσωπικές αναζητήσεις, περιπλανήσεις και εμπειρίες.

Βιβλίο ΙΙ – Πρόβλημα 8

η.

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Δοθείς τετράγωνος αριθμός, να αναλυθεί σε άθροισμα δυο τετραγώνων.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{ις}$ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Καὶ τετάχθω ὁ α^ος^ Δ^Υ^ $\bar{α}$, ὁ ἄρα ἕτερος ἔσται M̊ $\overline{ις}$ ⋔ Δ^Υ^ $\bar{α}$· δεήσει ἄρα M̊ $\overline{ις}$ ⋔ Δ^Υ^ $\bar{α}$ ἴσας εἶναι □ῳ.

πλάσσω τὸν □^ον^ ἀπὸ ϛ^ῶν^ ὅσων δήποτε ⋔ τοσούτων M̊ ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν $\overline{ις}$ M̊ πλευρά· ἔστω ϛ $\bar{β}$ ⋔ M̊ $\bar{δ}$. αὐτὸς ἄρα ὁ □^ος^ ἔσται Δ^Υ^ $\bar{δ}$ M̊ $\overline{ις}$ ⋔ ϛ $\overline{ις}$· ταῦτα ἴσα M̊ $\overline{ις}$ ⋔ Δ^Υ^ $\bar{α}$. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια.

Δ^Υ^ ἄρα $\bar{ε}$ ἴσαι ϛ $\overline{ις}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overline{ις}$ πέμπτων.

ἔσται ὁ μὲν $\overset{κε}{\overline{σνϛ}}$, ὁ δὲ $\overset{κε}{\overline{ρμδ}}$, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι $\overset{κε}{\overline{υ}}$, ἤτοι M̊ $\overline{ις}$, καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

Έστω ότι πρέπει να αναλυθεί ο 16 σε άθροισμα δυο τετραγώνων.
Αν ο πρώτος τετράγωνος είναι ο $χ^2$ τότε ο άλλος γίνεται $16-χ^2$. Θέλουμε άρα $16-χ^2$ να είναι ίσο με ένα τετράγωνο $ψ^2$.
Θα κατασκευάσω την πλευρά του τετραγώνου $ψ^2$ από ένα πολλαπλάσιο του χ μείον τόσων μονάδων, όση είναι η πλευρά (τετραγωνική ρίζα) των 16 μονάδων. Έστω ότι ο ψ είναι 2χ-4. Άρα ο $ψ^2$ γίνεται $4χ^2+16-16χ$ και θα ισούται με $16-χ^2$. Προσθέτουμε στα δυο μέλη τους αφαιρετέους και αφαιρούμε τους όμοιους όρους. Άρα $5χ^2$ θα ισούται με 16χ, κι έτσι ο άγνωστος γίνεται $χ=\frac{16}{5}$.
Ο ένας τετράγωνος λοιπόν είναι ο $\frac{256}{25}$ κι ο άλλος $\frac{144}{25}$. Αν τους προσθέσουμε κάνουν $\frac{400}{25}$ ήτοι 16.

Ἄλλως.

Ἔστω δὴ πάλιν τὸν ις̅ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ α^ου πλευρὰ ς α̅, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ς^ῶν ὅσων δήποτε ⋔ Μ̊ ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά· ἔστω δὴ ς β̅ ⋔ Μ̊ δ̅.

ἔσονται ἄρα οἱ □^οι, ὃς μὲν Δ^Υ α̅, ὃς δὲ Δ^Υ δ̅ Μ̊ ις̅ ⋔ ς ις̅. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι Μ̊ ις̅.

Δ^Υ ἄρα ε̅ Μ̊ ις̅ ⋔ ς ις̅ ἴσαι εἰσὶ Μ̊ ις̅· καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\varepsilon}{\overline{\iota\varsigma}}$.

ἔσται ἡ μὲν τοῦ α^ου πλ. $\frac{\varepsilon}{\iota\varsigma}$. αὐτὸς ἄρα ἔσται $\frac{\kappa\varepsilon}{\sigma\nu\varsigma}$.

ἡ δὲ τοῦ β^ου πλ. $\frac{\varepsilon}{\iota\beta}$. αὐτὸς ἄρα ἔσται $\frac{\kappa\varepsilon}{\rho\mu\delta}$· καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

Διαφορετικά

Έστω και πάλι ότι πρέπει να αναλύσουμε τον τετράγωνο αριθμό 16 σε άθροισμα δυο τετραγώνων. Θέτουμε ξανά την πλευρά του πρώτου χ, ενώ του άλλου πολ.χ-Μ όπου Μ η πλευρά του διαιρουμένου τετραγώνου. Έστω 2χ-4.
Γίνονται λοιπόν οι τετράγωνοι, ο ένας $χ^2$, κι ο άλλος $4χ^2$+16-16χ. Επιθυμούμε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 16.
Έτσι $5χ^2$+16-16 είναι ίσο με 16, άρα ο άγνωστος γίνεται $χ=\frac{16}{5}$ και η πλευρά του πρώτου τετραγώνου είναι $\frac{256}{25}$, ενώ η πλευρά του δεύτερου τετραγώνου είναι $\frac{144}{25}$ και η απόδειξη είναι φανερή.

Η λύση του Διόφαντου σε σύγχρονο συμβολισμό

Ο Διόφαντος θέτει τον έναν τετράγωνο $χ^2$, οπότε ο άλλος θα είναι $16-χ^2$.
Θα πρέπει να ισχύει $16-χ^2=ψ^2$.
Ο Διόφαντος θεωρεί ότι $ψ=2χ-4$, οπότε θα έχουμε:
$16-χ^2=(2χ-4)^2$ ή $16-χ^2=4χ^2+16-16χ$ ή $5χ^2=16χ$ ή $χ=\frac{16}{5}$ αφού $χ>0$.
Τα ζητούμενα τετράγωνα θα είναι επομένως $\chi^2=\frac{256}{25}$ και $16-\chi^2=16-\frac{256}{25}=\frac{144}{25}$.

Διαφορετικά

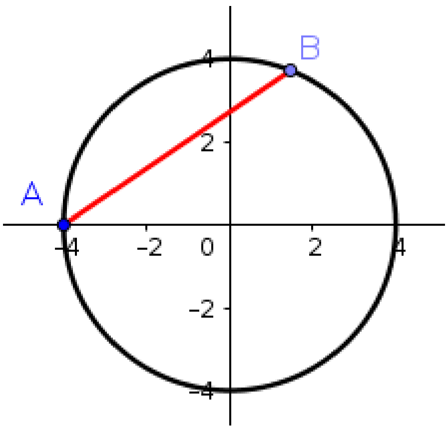
Θα πρέπει $χ^2+(2χ-4)^2=16$ ή $5χ^2-16χ+16=16$ ή $5χ^2 16χ$ ή $χ=\frac{16}{5}$.
Τα ζητούμενα τετράγωνα θα είναι επομένως $\chi^2=\frac{256}{25}$ και $16-\chi^2=16-\frac{256}{25}=\frac{144}{25}$.

Η γενική λύση του προβλήματος

Ο Διόφαντος αρκείται στην εύρεση μιας λύσης, αν κι όπως θα δούμε υπάρχουν άπειρες λύσεις του προβλήματος. Ωστόσο το μονοπάτι που χαράζει για τη λύση μπορεί εύκολο να διαπλατυνθεί.

Το πρόβλημά μας είναι να βρούμε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $χ^2+ψ^2=16$, όπου οι αριθμοί χ,ψ είναι ρητοί αριθμοί.

Η εξίσωση $χ^2+ψ^2=16$ όταν $\chi,\psi\in\mathbb{R}$ παριστάνει ως γνωστόν στο επίπεδο έναν κύκλο με κέντρο το σημείο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=4. Το σημείο Α(-4,0) ανήκει στον κύκλο. Αν Β είναι ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο του κύκλου με ρητές συντεταγμένες, τότε η κλίση της χορδής ΑΒ θα είναι ένας ρητός αριθμός λ. Οι χορδές που διέρχονται από το σημείο Α (εκτός αυτής που είναι παράλληλη στον άξονα ψψ') έχουν τη μορφή ψ=λ(χ+4).



Θέτουμε ψ=λ(χ+4) όπου λ τυχαίος ρητός αριθμός. Τότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται:
$\chi^2+\lambda^2\chi^2+8\lambda\chi+16\lambda^2=16$ ή $(1+\lambda^2)\chi^2+8\lambda\chi+16(\lambda^2-1)=0$.
Μια προφανής ρίζα της εξίσωσης αυτής είναι η $\chi_1=-4$. Από τον τύπο που δίνει το γινόμενο των ριζών του παραπάνω τριωνύμου για τη δεύτερη ρίζα χ_2 θα έχουμε $\chi_1\chi_2=\frac{16(\lambda^2-1)}{1+\lambda^2}$ οπότε βρίσκουμε $\chi_2=4\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$. Η αντίστοιχη τεταγμένη του σημείου Β είναι $\psi_2=4\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$.

Συνοψίζοντας

Οι λύσεις της εξίσωσης $\chi^2+\psi^2=16$ στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών δίνονται από τους τύπους

$$\chi=4\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \quad , \quad \psi=4\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \quad \text{όπου} \quad \lambda\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$$

- Η λύση του Διόφαντου αντιστοιχεί στην τιμή λ= $\frac{1}{3}$
- Η λύση χ=-4, ψ=0 προκύπτει για $\lambda=\infty$. Στην περίπτωση αυτή η χορδή γίνεται εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α.

Γενικότερα

Οι λύσεις της εξίσωσης $\chi^2+\psi^2=\rho^2$ στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών δίνονται από τους τύπους

$$\chi=\rho\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \quad , \quad \psi=\rho\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \quad \text{όπου} \quad \lambda\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$$

- Η ακολουθούμενη μέθοδος για την εύρεση των παραπάνω τύπων έχει καθιερωθεί στη βιβλιογραφία, ως μέθοδος της “**χορδής και εφαπτομένης**”.
- Όταν ρ=1 οι λύσεις της εξίσωσης $\chi^2+\psi^2=1$ στους ρητούς αριθμούς είναι $\chi=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$, $\psi=\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ όπου $\lambda\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$. Αυτοί οι τύποι μας επιτρέπουν να λύσουμε και το πρόβλημα εύρεσης των **Πυθαγορείων τριάδων**, δηλαδή των τριάδων (χ,ψ,ω) ακεραίων αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση $\boldsymbol{\chi^2+\psi^2=\omega^2}$. Λόγω ομογένειας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ακέραιοι χ,ψ,ω είναι πρώτοι μεταξύ τους. Επειδή (χ,ψ)=(χ,ψ,ω)=(ψ,ω)=1, οι χ,ψ δεν μπορεί να είναι και οι δυο άρτιοι. Όμως ούτε και περιττοί μπορεί να είναι γιατί τότε το άθροισμα $\chi^2+\psi^2$ θα ήταν ισοδύναμο με 2mod4, δηλαδή $\omega^2\equiv 2\bmod 4$, πράγμα άτοπο αφού το τετράγωνο ενός ακεραίου είναι πάντοτε ισοδύναμο με 0 ή 1 mod4. Έτσι συμπεραίνουμε ότι από τους χ,ψ ο ένας θα είναι άρτιος κι ο άλλος περιττός. Έστω ότι ο χ είναι περιττός και ο ψ άρτιος. Τότε φυσικά ο ω θα είναι περιττός. Διαιρώντας και τα δυο

μέλη της εξίσωσης $\chi^2+\psi^2=\omega^2$ με ω^2 προκύπτει η εξίσωση $\left(\frac{\chi}{\omega}\right)^2+\left(\frac{\psi}{\omega}\right)^2=1$. Θα πρέπει επομένως να είναι $\frac{\chi}{\omega}=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$ και $\frac{\psi}{\omega}=\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$. Αν θέσουμε $\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$ με (α,β)=1 τότε θα είναι $\frac{\chi}{\omega}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2+\alpha^2}$ και $\frac{\psi}{\omega}=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $(\beta^2-\alpha^2,\beta^2+\alpha^2)=1$ ή 2 και επίσης $(2\alpha\beta,\beta^2+\alpha^2)=1$ ή 2. Αν $(\beta^2-\alpha^2,\beta^2+\alpha^2)=2$ τότε θα πρέπει α,β να είναι περιττοί. Θα έχουμε επομένως $\frac{\chi}{\omega}=\frac{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}{\frac{\beta^2+\alpha^2}{2}}$ και $\frac{\psi}{\omega}=\frac{\alpha\beta}{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$. Επειδή τώρα όλα τα κλάσματα στις τελευταίες ισότητες είναι ανάγωγα, θα πρέπει $\chi=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2},\ \psi=\alpha\beta,\ \omega=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$. Αυτές οι σχέσεις δεν μπορεί να υφίστανται αφού υποθέσαμε ότι ο ψ είναι άρτιος. Έτσι δεν μένει παρά να ισχύει $\boldsymbol{\chi=\beta^2-\alpha^2,\ \psi=2\alpha\beta,\ \omega=\alpha^2+\beta^2}$ όπου α,β ακέραιοι με (α,β)=1, ο ένας άρτιος κι ο άλλος περιττός.

- Το 1621 εκδόθηκαν στη Γαλλία από τον μαθηματικό C.G. **Bachet** τα αριθμητικά του Διόφαντου, με σπουδαίο μαθηματικό σχολιασμό. Ένα αντίγραφο αυτής της έκδοσης μελετούσε ο μεγάλος “ερασιτέχνης” μαθηματικός, και νομικός στο επάγγελμα, Pierre de **Fermat**. Ήταν συνήθεια του Fermat να σημειώνει τα αποτελέσματα των συλλογισμών του στο περιθώριο του αντιγράφου του. Έτσι σχολιάζοντας το παραπάνω όγδοο πρόβλημα του δευτέρου βιβλίου των Αριθμητικών, ο Fermat γράφει: “Αντιθέτως δεν είναι δυνατόν να σπάσουμε έναν κύβο σε δυο άλλους, μια τέταρτη δύναμη σε δύο τέταρτες δυνάμεις, ή γενικά κάθε δύναμη πέραν της δεύτερης σε άθροισμα δυο δυνάμεων του ίδιου βαθμού: Έχω ανακαλύψει μια πραγματικά **θαυμάσια απόδειξη** [αυτού του γενικού θεωρήματος] που αυτό το περιθώριο είναι πολύ στενό για να την χωρέσει.” Αυτό είναι το περίφημο **Τελευταίο Θεώρημα**, που ανακάλυψε στα 1637 περίπου. Αυτή η “θαυμάσια απόδειξη” δεν βρέθηκε ποτέ ανάμεσα στα γραπτά του Fermat. Πολλοί σπουδαίοι μαθηματικοί από εκείνη την εποχή και μετά επιχείρησαν να κατασκευάσουν μια απόδειξη αυτής της πρότασης, χωρίς επιτυχία. Οι προσπάθειες αυτές είχαν σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη νέων πεδίων στη θεωρία Αριθμών όπως η λεγόμενη Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών. Το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat αποδείχθηκε τελικά το 1994-95 από τον Άγγλο μαθηματικό **Andrew J. Wiles.**

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Βιβλίο ΙΙ – Πρόβλημα 11

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον.

Δοθέντων δυο αριθμών, να προστεθεί ο ίδιος αριθμός, ώστε να κάνει τον καθένα τους τετράγωνο.

Ἔστω δὴ τῷ β̄ καὶ τῷ γ̄ καὶ ἔστω ὁ προστιθέμενος ϛ ᾱ. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ϛ ᾱ M̊β̄, ὁ δὲ ϛ ᾱ M̊γ̄, ἴσ. □ᵒ· καὶ τοῦτο τὸ εἶδος καλεῖται διπλοϊσότης· ἰσοῦται δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. ἰδὼν τὴν ὑπεροχήν, ζήτει δύο ἀριθμοὺς ἵνα τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν ποιῇ τὴν ὑπεροχήν· εἰσὶ δὲ M̊δ̄ καὶ M̊ος δˣ. τούτων ἤτοι τῆς ὑπεροχῆς τὸ L′ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι, ἢ τῆς συνθέσεως τὸ L′ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι.

ἀλλὰ τῆς ὑπεροχῆς τὸ L′ ἐφ᾽ ἑαυτό ἐστι $\frac{\xi\delta}{\sigma\kappa\varepsilon}$· *ταῦτα ἴσα ϛ ᾱ M̊β̄, καὶ γίνεται ὁ ϛ* $\frac{\xi\delta}{\text{ϟ}\zeta}$.

Έστω ότι οι δοθέντες αριθμοί είναι ο 2 και ο 3 και ο προστιθέμενος αριθμός ο χ. Γίνεται λοιπόν ο πρώτος χ+2, ο δεύτερος χ+3 και ισούνται με κάποια τετράγωνα. Αυτό το είδος καλείται διπλοϊσότητα και μετατρέπεται σε ισότητα με τον εξής τρόπο: Βλέποντας τη διαφορά, αναζήτησε δυο αριθμούς ώστε το γινόμενό τους να κάνει τη διαφορά. Έστω το 4 και το 1/4. Αυτών των αριθμών το τετράγωνο της ημιδιαφοράς τους είναι ο μικρότερος από τους δυο αριθμούς, ενώ το τετράγωνο του ημιαθροίσματός τους ισούται με τον μεγαλύτερο.

Αλλά το τετράγωνο της ημιδιαφοράς είναι 225/64 κι αυτό είναι ίσο με χ+2, άρα ο άγνωστος χ γίνεται 97/64.

τῆς δὲ συνθέσεως τὸ L' ἐφ' ἑαυτό ἐστι $\frac{\xi\delta}{\sigma\pi\theta}$· ταῦτα ἴσα τῷ μείζονι, τουτέστιν ς ᾱ Μ̊γ̄, καὶ γίνεται ὁ ς πάλιν $\frac{\xi\delta}{ϟ\zeta}$.

ἔσται ἄρα ὁ προστιθέμενος $\frac{\xi\delta}{ϟ\zeta}$, καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλὴν ἰσότητα ἐμπέσῃ, δεικτέον οὕτως·

Το τετράγωνο του ημιαθροίσματος είναι 289/64 κι αυτό είναι ίσο με χ+3, άρα και πάλι ο άγνωστος γίνεται 97/64.

Άρα ο ζητούμενος προστιθέμενος αριθμός είναι ο 97/64 και η πρόταση γίνεται φανερή.

Για να μην εμπαίσουμε σε διπλή ισότητα ενεργούμε ως εξής:

Τῷ β̄ καὶ τῷ γ̄ προσευρεῖν τινα ἀριθμόν, ὃς ἑκατέρῳ προστεθεὶς ποιεῖ □ον· ζητῶ πρότερόν τινα ἀριθμόν, ὃς προσλαβὼν Μ̊β̄ ποιεῖ □ον, ἢ καὶ τὶς ἀριθμὸς προσλαβὼν Μ̊ γ̄ ποιεῖ □ον· ἀφ' οἷου δ' ἂν □ου ἀφέλω τὰς Μ̊, οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος· ἔστω δὴ ἐπὶ τῶν Μ̊β̄, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ ΔΥ ᾱ· λοιπὸν ἔσται ΔΥ ᾱ ⋔ Μ̊β̄, καὶ δῆλον ὡς, ἐὰν προσλάβῃ Μ̊β̄, ποιεῖ □ον· λοιπόν ἐστι καὶ γ̄Μ̊ αὐτὸν προσλαβόντα ποιεῖν □ον· ἀλλ' ἐὰν προσλάβῃ Μ̊γ̄, γίνεται ΔΥ ᾱ Μ̊ ᾱ· ταῦτα ἴσα □ῳ.

Για τον 2 και τον 3 θέλουμε να βρούμε κάποιον αριθμό, ο οποίος αν προστεθεί στον καθέναν τους τον κάνει τετράγωνο. Ζητούμε πρωτύτερα ένα αριθμό ο οποίος προσλαμβάνοντας 2 μονάδες κάνει τετράγωνο και προσλαμβάνοντας 3 μονάδες κάνει επίσης τετράγωνο. Αν από το τετράγωνο αφαιρέσουμε τις μονάδες βρίσκουμε τον ζητούμενο. Στην περίπτωσή μας 2 μονάδες αφαιρούνται από το ένα τετράγωνο ω^2 και λαμβάνουμε ω^2-2, και είναι φανερό ότι αν αυτός ο αριθμός προσλάβει 2 μονάδες γίνεται τετράγωνος. Αλλά κι όταν προσλάβει 3 μονάδες γίνεται τετράγωνος. Όμως αν προσλάβει 3 μονάδες προκύπτει ότι ω^2+1 είναι ίσο με ψ^2.

πλάσσω τὸν □ον ἀπὸ ς ᾱ ⋔ Μ̊ τοσούτων ὥστε τὴν τῆς Δ^Υ ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προεκτεθειμένας τῆς λείψεως Μ̊ας, οἷον ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος τὰς Μ̊ β̄· οὕτως γὰρ ἂν πάλιν ἐν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω δὴ ἀπὸ ς ᾱ ⋔ Μ̊ δ̄· αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ □ος, Δ^Υ ᾱ Μ̊ ις̄ ⋔ ς η̄· ταῦτα ἴσα Δ^Υ ᾱ Μ̊ ᾱ.

κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια· λοιποὶ ς η̄ ἴσοι Μ̊ ιε̄, καὶ γίνεται ὁ ς $\frac{\eta}{\iota\varepsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ προστιθέμενος $\frac{\xi\delta}{ϟ\zeta}$.

Θα κατασκευάσω το ψ^2 από χ-μ μονάδες ώστε η δύναμη ω^2 να είναι μεγαλύτερη από τις μονάδες της προαναφερθείσας διαφοράς, που επί του παρόντος είναι 2 μονάδες. Έτσι το κάθε μέρος θα το καταλάβουν όροι ενός είδους πρώτου βαθμού. Έστω λοιπόν το ψ είναι ω-4. Τότε το ψ^2 γίνεται $\omega^2+16-8\omega$. Αυτό θα είναι ίσο με ω^2+1.

Προσθέτουμε στα δυο μέρη τη διαφορά και αφαιρούμε τους όμοιους όρους. Μένει 8ω ίσο με 15 και ο άγνωστος ω γίνεται 15/8.

Με τα δεδομένα αυτά ο προστιθέμενος αριθμός θα γίνει 97/64.

Η λύση του Διόφαντου σε σύγχρονο συμβολισμό

α΄τρόπος

Αν χ είναι ο ζητούμενος αριθμός τότε θα πρέπει
2+χ=$ω^2$ (1) και 3+χ=$ψ^2$ (2)
Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε $ψ^2$-$ω^2$=1 (3). Δηλαδή (ψ-ω)(ψ+ω)=1 (4)
Ο Διόφαντος θέτει ψ-ω=1/4 και ψ+ω=4 (5)
Την εύρεση της λύσης του συστήματος (5) τη θεωρεί μάλλον γνωστή διαδικασία. Εξάλλου αυτό είναι το περιεχόμενο του πρώτου προβλήματος στο πρώτο βιβλίο των Αριθμητικών. Είναι :

$\omega=\frac{1}{2}(4-\frac{1}{4})$ το μισό της διαφοράς των αριθμών 4 και 1/4.

$\psi=\frac{1}{2}(4+\frac{1}{4})$ το μισό του αθροίσματος των αριθμών 4 και 1/4.

Έτσι προκύπτει $\omega=\frac{15}{8}$ και $\psi=\frac{17}{8}$, οπότε $\omega^2=\frac{225}{64}$ και $\psi^2=\frac{289}{64}$ (6)

Από τη σχέση (1) τώρα έχουμε $\chi=\frac{225}{64}-2=\frac{97}{64}$

Ομοίως και από τη σχέση (2) έχουμε $\chi=\frac{289}{64}-3=\frac{97}{64}$.

Ο ζητούμενος αριθμός συνεπώς είναι $\chi=\frac{97}{64}$.

β΄τρόπος

Ο Διόφαντος θεωρεί ότι ο ζητούμενος αριθμός χ ικανοποιεί τις σχέσεις:
χ=$ω^2$-2 (7)
χ=$ψ^2$-3 (8)
Αν στα δυο μέλη της (7) προσθέσουμε το 3 θα έχουμε:
χ+3=$ω^2$+1, οπότε $ψ^2$=$ω^2$+1 (8)
Ο Διόφαντος στο σημείο αυτό θέτει ψ=ω-κ όπου το κ θα το επιλέξει με τέτοιο τρόπο ώστε $ω^2$>2. Αυτό το κάνει γιατί στο πλαίσιο που λειτουργεί ο Διόφαντος ο όρος “αριθμός” σημαίνει θετικός ρητός αριθμός. Τελικά επιλέγει την τιμή κ=4, δηλαδή θέτει ψ=ω-4 (9). Με τον τρόπο αυτό θα προκύψει μετά τις σχετικές απλοποιήσεις εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς ω.
Πράγματι αντικαθιστώντας την τιμή της (9) στην (8) βρίσκουμε:

$ω^2$+16-8ω=$ω^2$+1 άρα 8ω=15 κι έτσι $\omega=\frac{15}{8}$.

Από την (7) τώρα προκύπτει $\chi=\frac{225}{64}-2=\frac{97}{64}$.

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Η γενική λύση του προβλήματος

Στην παράγραφο αυτή θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις πάνω στα προβλήματα που παραθέτει ο Διόφαντος στα Αριθμητικά, σκεπτόμενοι όμως ως σύγχρονοι αναγνώστες του έργου του.

Κοιτάζοντας πρώτα απ' όλα το πρόβλημα που θέτει ο Διόφαντος

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον.

βλέπουμε ότι θέτει ένα πρόβλημα με μια γενική διατύπωση που θα την αποδίδαμε σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα υπό τη μορφή του παρακάτω συστήματος:
$\lambda+\chi=\omega^2$
$\mu+\chi=\psi^2$ (10)
όπου λ και μ είναι οι δυο δοθέντες αριθμοί και χ,ψ,ω οι άγνωστοι. Πρόκειται για ένα μη γραμμικό 2Χ3 σύστημα. Αφού το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων, γενικά δεν περιμένουμε το σύστημα να έχει μοναδική λύση αλλά άπειρες λύσεις που θα εξαρτώνται από μια παράμετρο. Το πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία προβλημάτων που τα χαρακτηρίζουμε ως προβλήματα απροσδιόριστης ανάλυσης.

Ωστόσο προχωρώντας την ανάγνωση του σχετικού κειμένου των Αριθμητικών διαπιστώνουμε ότι ο Διόφαντος δεν λύνει το γενικό πρόβλημα, αλλά το εξειδικεύει θέτοντας λ=2 και μ=3, οπότε το πρόβλημα παίρνει τη μορφή:
$2+\chi=\omega^2$
$3+\chi=\psi^2$ (11)

Ακολουθώντας τα βήματά του είμαστε μπροστά στη λύση $\chi=\frac{97}{64}$, $\omega=\frac{15}{8}$, $\psi=\frac{17}{8}$ οπότε το ερώτημα που τίθεται είναι αν η λύση αυτή είναι μοναδική. Όπως προαναφέραμε θα περιμέναμε το πρόβλημα να έχει κι άλλες (άπειρες ενδεχομένως) λύσεις. Το κλειδί εδώ είναι στις σχέσεις (5) που θεωρεί ο Διόφαντος. Η επιλογή του ζεύγους 4,1/4 είναι μια ανάμεσα σε άπειρες επιλογές. Θα μπορούσαμε να πάρουμε το ζεύγος 5,1/5 ή το ζεύγος 2/3,3/2 κ.ο.κ. Ας δούμε το ζήτημα λοιπόν γενικότερα.

Αν θέσουμε ψ+ω=κ (12) τότε θα πρέπει ψ-ω=1/κ (13). Προσθέτοντας ή αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (12) και (13) βρίσκουμε:

$\omega=\frac{1}{2}\left(\kappa-\frac{1}{\kappa}\right)$ (14) και $\psi=\frac{1}{2}\left(\kappa+\frac{1}{\kappa}\right)$ (15)

Θα είναι επομένως $\omega^2=\frac{1}{4}\left(\kappa-\frac{1}{\kappa}\right)^2$ (16) και $\psi^2=\frac{1}{4}\left(\kappa+\frac{1}{\kappa}\right)^2$ (17) οπότε από τις (11) προκύπτει ότι $\chi=\omega^2-2=\frac{1}{4}\left(\kappa-\frac{1}{\kappa}\right)^2-2=\frac{1}{4}\left(\kappa^2+\frac{1}{\kappa^2}-10\right)$.

Η γενική λύση λοιπόν του συστήματος (11) είναι $\chi=\frac{1}{4}\left(\kappa^2+\frac{1}{\kappa^2}-10\right)$ $\mu\varepsilon$ $\kappa\in\mathbb{Q}^*$ (18)

Για το Διόφαντο δεν θα ήταν δεκτές όλες οι τιμές του χ που προκύπτουν από τον τύπο (18). Δεκτές θα ήταν μόνο αυτές που ικανοποιούν την ανίσωση $\kappa^2+\frac{1}{\kappa^2}-10>0$ (19). Η ελάχιστη ακέραια τιμή του κ που επαληθεύει την (19) είναι κ=4. Δεν είναι επομένως καθόλου τυχαία η επιλογή που παρουσιάζει στο κείμενό του. Είναι η ελάχιστη “απλή” τιμή που μπορεί να χρησιμοποιήσει.

Αυτό που παρατηρήσαμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ο Διόφαντος το κάνει σε όλα σχεδόν τα προβλήματα των Αριθμητικών. Δηλαδή θέτει ένα γενικό ερώτημα. Το εξειδικεύει σε ένα συγκεκριμένο της μορφής του γενικού ερωτήματος, κι όταν το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις αρκείται στην εύρεση μιας μόνο λύσης. Πρέπει όμως να ομολογήσουμε ότι στο κείμενό του υπονοείται μια γενική μεθοδολογία για την εύρεση της λύσης. Η συμβολική εργαλειοθήκη του, δεν του επιτρέπει να πραγματευτεί εύκολα τις γενικές λύσεις των προβλημάτων που μελετά.

Βιβλίο Δ – Πρόβλημα 11

Εὑρεῖν δύο κύβους ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἴση ἔσται τῇ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχῇ.

Να βρεθούν δυο κύβοι των οποίων η διαφορά να ισούται με τη διαφορά των πλευρών τους.

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῶν ἡ μὲν ς $\overline{\beta}$, ἡ δὲ ς $\overline{\gamma}$· καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων Kᵞ $\overline{\iota\theta}$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν ς $\overline{\alpha}$. ς ἄρα $\bar{\alpha}$ ἴσος Kᵞ $\overline{\iota\theta}$.
Καὶ γίνεται ὁ ς οὐ ῥητὸς τῷ μὴ ἔχειν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον □ᵒᵘ πρὸς □ᵒᵛ. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν

Έστω ότι οι πλευρές των κύβων είναι 2χ η μια και 3χ η άλλη. Τότε η διαφορά των κύβων τους θα είναι $19\chi^3$, ενώ η διαφορά των πλευρών θα είναι χ. Άρα πρέπει $19\chi^3=\chi$.
Ο χ έτσι γίνεται μη ρητός αριθμός αφού δεν ισούται με το λόγο δυο τετραγώνων. Πρέπει λοιπόν να βρούμε δυο κύβους, τέτοιους ώστε η διαφορά τους προς τη διαφορά των πλευρών τους, να έχει λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό.

πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν λόγον ἔχῃ ὃν □ᵒˢ ⟨ ἀριθμὸς ⟩ πρὸς □ᵒᵛ ἀριθμόν.
Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ς $\overline{\alpha}$, ἡ δὲ ς $\overline{\alpha}$ M̊ $\overline{\alpha}$, ἵνα καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ᾖ □ᵒˢ τουτέστι M̊ $\overline{\alpha}$· καὶ ἐπεὶ ἔστι τοῦ μὲν πλ. ς $\overline{\alpha}$, τοῦ δὲ M̊ $\overline{\alpha}$ καὶ ς $\overline{\alpha}$, ἔσται ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν M̊ $\overline{\alpha}$, ⟨ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῶν κύβων Δᵞ $\overline{\gamma}$ ς $\overline{\gamma}$ M̊ $\overline{\alpha}$⟩ θέλομεν οὖν Δᵞ $\overline{\gamma}$ ς $\overline{\gamma}$ M̊ $\bar{\alpha}$ πρὸς τὴν M̊ $\bar{\alpha}$, τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν, λόγον ἔχειν ὃν □ᵒˢ ἀριθμὸς πρὸς □ᵒᵛ ἀριθμόν· τὸν ἄρα ὑπ' αὐτῶν δεῖ εἶναι □ᵒᵛ· ἔστι δὲ ὁ ὑπ' αὐτῶν Δᵞ $\overline{\gamma}$ ς $\overline{\gamma}$ M̊ $\bar{\alpha}$. ταῦτα ἴσα □ῳ τῷ ἀπὸ πλ.. M̊ $\bar{\alpha}$ ⋔ ς $\overline{\beta}$· καὶ γίνεται ὁ ς M̊ $\overline{\zeta}$· ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσονται αἱ πλευραὶ ἡ μὲν $\overline{\zeta}$, ἡ δὲ $\overline{\eta}$.

Έστω ότι οι πλευρές των κύβων είναι χ και χ+1. Τότε η διαφορά τους είναι 1 και είναι τετράγωνος, η δε διαφορά των κύβων τους είναι $3\chi^2+3\chi+1$. Θέλουμε λοιπόν ο $3\chi^2+3\chi+1$ προς τη διαφορά των πλευρών 1, να είναι λόγος δυο τετράγωνων αριθμών. Άρα και το γινόμενό τους θα είναι τετράγωνος. Όμως το γινόμενό τους είναι $3\chi^2+3\chi+1$, και ας θεωρήσουμε ότι είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς 1-2χ. Υπό αυτές τις συνθήκες ο άγνωστος γίνεται χ=7 και οι πλευρές γίνονται η μια 7 και η άλλη 8.

Ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω τὰς πλ. τῶν κύβων, ἣν μὲν ϛ ζ̅, ἣν δὲ ϛ η̅· καὶ ἡ μὲν τούτων ὑπεροχὴ ἔστιν ϛ α̅, ἡ δὲ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν κύβων ὑπεροχὴ Κʏ ρ̅ξ̅θ̅.

Κʏ ἄρα ρ̅ξ̅θ̅ ἴσοι ϛ α̅· καὶ γίνεται ὁ ϛ ἑνὸς ⟨ ιγου ⟩.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ζ̅, ἡ δὲ η̅.

Επιστρέφοντας στο αρχικό πρόβλημα, θέτουμε τις πλευρές των κύβων να είναι η μια 7χ και η άλλη 8χ. Τότε η διαφορά τους είναι χ, ενώ η διαφορά των κύβων τους $169χ^3$.

Άρα $169χ^3=χ$, δηλαδή γίνεται ο $χ=\frac{1}{13}$.

Υπό αυτές τις συνθήκες οι πλευρές των κύβων γίνονται $\frac{7}{13}$ η μια και $\frac{8}{13}$ η άλλη.

Η λύση του Διόφαντου σε σύγχρονο συμβολισμό

Έστω ότι οι πλευρές των κύβων είναι χ και χ+1. Τότε η διαφορά τους είναι 1 και είναι τετράγωνος, η δε διαφορά των κύβων τους είναι $3χ^2+3χ+1$. Θέλουμε λοιπόν ο $3χ^2+3χ+1$ προς τη διαφορά των πλευρών 1, να είναι λόγος δυο τετράγωνων αριθμών. Άρα και το γινόμενό τους θα είναι τετράγωνος. Όμως το γινόμενό τους είναι $3χ^2+3χ+1$, και ας θεωρήσουμε ότι είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς 1-2χ. Υπό αυτές τις συνθήκες ο άγνωστος γίνεται χ=7 και οι πλευρές γίνονται η μια 7 και η άλλη 8.

Επιστρέφοντας στο αρχικό πρόβλημα, θέτουμε τις πλευρές των κύβων να είναι η μια 7χ και η άλλη 8χ. Τότε η διαφορά τους είναι χ, ενώ η διαφορά των κύβων τους $169χ^3$.

Άρα $169χ^3=χ$, δηλαδή γίνεται ο $χ=\frac{1}{13}$.

Υπό αυτές τις συνθήκες οι πλευρές των κύβων γίνονται $\frac{7}{13}$ η μια και $\frac{8}{13}$ η άλλη.

Σχόλια

Αν μετά τις πρώτες αναγνώσεις του κειμένου σας φαίνονται ακατανόητες “αλχημείες” οι ενέργειες του Διόφαντου, ας προσπαθήσουμε στην παράγραφο αυτή να καταλάβουμε το σκεπτικό του.

Το πρόβλημα που θέτει ο Διόφαντος είναι η εύρεση δυο αριθμών α,β έτσι ώστε $\mathbf{α^3-β^3=α-β}$ (1). Από την πορεία της επίλυσης διαπιστώνουμε ότι αναζητά λύσεις της μορφής **α=κχ, β=λχ** (2). Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $(κ^3-λ^3)χ^3=(κ-λ)χ$. Έτσι για χ≠0 θα έχουμε $χ^2=\frac{κ-λ}{κ^3-λ^3}$ (3). Αν το κλάσμα στο δεξί μέλος της (3) είναι ο λόγος δυο τετραγώνων, τότε η (3) θα έχει ρητή λύση. Για αυτό το λόγο ο Διόφαντος αναζητάει τιμές των κ,λ ώστε το κλάσμα $\frac{\kappa-\lambda}{\kappa^3-\lambda^3}$ να είναι λόγος δυο τετραγώνων. Θέτει λοιπόν κ=ω+1, λ=ω οπότε αφού κ-λ=1 είναι τετράγωνο, θα πρέπει και η παράσταση $\kappa^3-\lambda^3=3\omega^2+3\omega+1$, να είναι επίσης τέλειο τετράγωνο. (Για την ακρίβεια ο Διόφαντος θεωρεί ότι αφού ο λόγος των δυο ποσοτήτων είναι λόγος δυο τετραγώνων, τότε και το γινόμενό τους θα είναι επίσης τέλειο τετράγωνο. Όμως $(\kappa-\lambda)(\kappa^3-\lambda^3)=(\kappa-\lambda)^2(\kappa^2+\kappa\lambda+\lambda^2)$. Έτσι η παράσταση $\kappa^2+\kappa\lambda+\lambda^2$ θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο.) Επιλέγει ο Διόφαντος το ω έτσι ώστε να ισχύει $3\omega^2+3\omega+1=(1-2\omega)^2$. Αυτή η επιλογή τον οδηγεί στη σχέση $\omega^2=7\omega$, άρα ω=7. Έτσι έχει βρει κ=8 και λ=7 και η σχέση (3) πλέον του δίνει τη λύση $\chi=\frac{1}{13}$ κι έτσι $\alpha=\frac{8}{13}$, $\beta=\frac{7}{13}$.

Η γενική λύση του προβλήματος

Η μέθοδος του Διόφαντου, για την εύρεση αριθμών α,β που ικανοποιούν την εξίσωση $\boldsymbol{\alpha^3-\beta^3=\alpha-\beta}$ που αναπτύξαμε παραπάνω, μπορεί να μας δώσει άπειρες λύσεις της μορφής α=κχ, β=λχ. Το ερώτημα είναι αν όλες οι λύσεις είναι τέτοιας μορφής. Στην παράγραφο αυτή θα επιχειρήσουμε να βρούμε τις γενικές λύσεις της εξίσωσης (1) κάνοντας χρήση της μεθόδου της “χορδής” που είδαμε στα σχόλια προηγούμενου προβλήματος.

Η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha^3-\beta^3=\alpha-\beta}$ με α≠β είναι ισοδύναμη με την $\boldsymbol{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1}$ (**4**). Το ζεύγος (0,1) είναι μια προφανής λύση της (4). Θέτουμε **β=λα+1** (**5**). (Εξίσωση χορδής διερχόμενης από το σημείο (0,1) και έχουσας κλίση $\lambda\in\mathbb{Q}$). Από τις (4),(5) έχουμε: $\alpha^2+\alpha(\lambda\alpha+1)+(\lambda\alpha+1)^2=1$ ⇔ $(\lambda^2+\lambda+1)\alpha^2+(1+2\lambda)\alpha=0$ ⇔ α=0 ή α= $-\frac{1+2\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}$. Αν α=0 τότε β=1. Αν α≠0 τότε $\alpha=-\frac{1+2\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}$ και $\beta=\lambda\alpha+1=\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+\lambda+1}$ (**6**). Η μόνη χορδή που δεν περιγράφεται από την (5) είναι αυτή που είναι κάθετη στον οριζόντιο άξονα και αντιστοιχεί στην τιμή του λ=∞. Αν θέσουμε την τιμή αυτή στους τύπους (6) βρίσκουμε α=0 και β=-1 ζεύγος που αποτελεί επίσης λύση της (4). Συνοψίζοντας επομένως μπορούμε να πούμε ότι η γενική λύση της (4) περιγράφεται από τους τύπους $\boldsymbol{\alpha=-\frac{1+2\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}}$, $\boldsymbol{\beta=\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+\lambda+1}}$ με $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{Q}}\cup\{\infty\}$ (7)

- Από τους τύπους (7) μπορούμε να λάβουμε και τη λύση α=0, β=1 θέτοντας $\lambda=-\frac{1}{2}$.
- Η λύση που δίνει ο Διόφαντος, μπορεί να βρεθεί για την τιμή $\lambda=-\frac{3}{4}$.
- Οι τύποι (7) δίνουν θετικές τιμές για τις τιμές $\lambda\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.
- Επειδή όταν το ζεύγος (α,β) είναι λύση της (4), τότε και το ζεύγος (-α,-β) είναι επίσης λύση

της (4) η γενική λύση μπορεί να περιγραφεί και με τους τύπους $\boldsymbol{\alpha=\frac{1+2\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}}$, $\boldsymbol{\beta=\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+\lambda+1}}$ με $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}}$ **(8)**. Οι τύποι (7) μπορούν να παραχθούν από τους (8) με τον μετασχηματισμό $\lambda\to-\frac{\lambda+2}{2\lambda+1}$.

- Οι τύποι (8) δείχνουν ότι οι λύσεις της μορφής α=κχ, β=μχ, που αναζητάει ο Διόφαντος, είναι γενικές λύσεις. Πράγματι αρκεί να θέσουμε $\chi=\frac{1}{\lambda^2+\lambda+1}$, $\kappa=1+2\lambda$, $\mu=\lambda^2-1$.

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Βιβλίο Δ – Πρόβλημα 24

Δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν κύβον παρὰ πλευράν.

Δοθείς αριθμός ,να αναλυθεί σε άθροισμα δυο αριθμών, των οποίων το γινόμενο να είναι ίσο με έναν κύβο ελαττωμένο κατά την πλευρά του.

Ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς ὁ ς̄.

Τετάχθω ὁ αος ϛ ᾱ, λοιπὸς ἄρα ὁ βος ἔσται Μ̊ ς̄ ⋔ ϛ ᾱ.

λοιπὸν δεῖ εἶναι τὸν ὑπ' αὐτῶν κύβον παρὰ πλευράν· ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἔσται ϛ ς̄ ⋔ ΔΥ ᾱ· ταῦτα ἴσα κύβῳ παρὰ πλευράν· πλάσσω κύβον ἀπὸ ϛ ὁσωνδήποτε ⋔ Μ̊ ᾱ· ἔστω δὴ ἀπὸ ϛ β̄ ⋔ Μ̊ ᾱ. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ ΚΥ η̄ ϛ δ̄ ⋔ ΔΥ ιβ̄. ταῦτα ἴσα ϛ ς̄ ⋔ ΔΥ ᾱ.

Έστω ότι ο δοθείς αριθμός είναι ο 6.

Αν τεθεί ο ένας αριθμός να είναι ο χ, τότε ο άλλος γίνεται 6-χ.
Θα πρέπει το γινόμενο των δυο αριθμών να είναι ίσο με έναν κύβο ελαττωμένο κατά την πλευρά του. Το γινόμενο των αριθμών είναι $6χ-χ^2$ και θα ισούται με έναν κύβο μείον την πλευρά του. Θα κατασκευάσουμε τον κύβο με πλευρά 2χ-1. Τότε η διαφορά της πλευράς από τον κύβο γίνεται $8χ^3+4χ-12χ^2$. Αυτό θα ισούται με $6χ-χ^2$.

Καὶ εἰ ἦσαν οἱ ϛ ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι, λοιπὸν ἐγίνετο ἰσῶσαι ΚΥ ἴσους ΔΥ, καὶ ὁ ϛ ἦν ῥητός· ἀλλὰ οἱ ϛ β̄ ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν ὑπὲρ ϛ β̄, τουτέστιν ἐκ τῶν τρὶς τῶν β̄ ϛ· καὶ ἐὰν τρὶς οἱ β̄ ϛ λείψωσιν ϛ β̄, ποιοῦσι δὶς τοὺς ϛ β̄. οἱ δὲ ς̄ τυχόντες εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμόν, ὡς τοὺς ϛ β̄, ὃς δὶς γενόμενος ποιεῖ ς̄· ἔστι δὲ ὁ γ̄.

Αν οι συντελεστές του αγνώστου χ στα δυο μέλη της ισότητας ήταν ίσοι, θα μπορούσαμε να εξισώσουμε τους κύβους με τα τετράγωνα και έτσι θα υπολογίζαμε τον χ που θα ήταν ρητός αριθμός. Αλλά 3·2χ-2χ=2·2χ. Αρκεί να βρω κάποιον αριθμό, που όπως το 2χ, όταν διπλασιαστεί να μας δίνει 6. Αυτός ο αριθμός είναι ο 3.

Ζητῶ οὖν ϛ ϛ̄ ⋔ Δ^Υ ᾱ ἴσους κύβῳ παρὰ πλευράν· νῦν τάσσω τὴν τοῦ κύβου πλ. ἀπὸ ϛ γ̄ ⋔ Μ̊ ᾱ· καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ Κ^Υ κ̄ζ̄ ϛ ϛ̄ ⋔ Δ^Υ κ̄ζ̄ ἴσ. ϛ ϛ̄ ⋔ Δ^Υ ᾱ, καὶ γίνεται ὁ ϛ κζ/κϛ.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν αος κ̄ϛ̄, ὁ δὲ βος ρ̄λ̄ϛ̄.

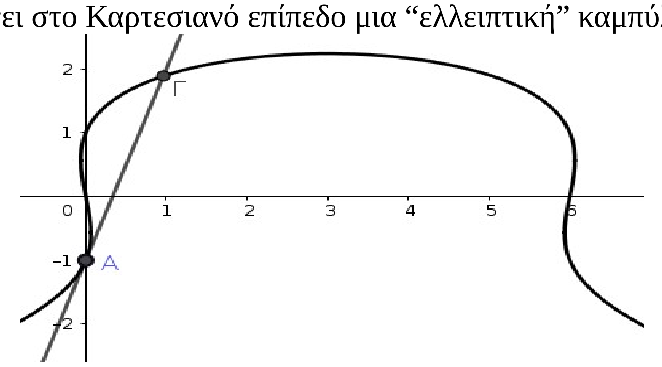
Ζητώ λοιπόν το 6χ-χ^2 να είναι ίσο με κύβο μείον την πλευρά του κύβου. Τώρα θέτω την πλευρά του κύβου ίση με 3χ-1. Η διαφορά της πλευράς από τον κύβο της είναι 27χ^3+6χ-27χ^2 και θα ισούται με 6χ-χ^2. Ο άγνωστος γίνεται ίσος με $\frac{26}{27}$.

Υπό αυτά τα δεδομένα ο μεν πρώτος αριθμός είναι $\frac{26}{27}$, ο δε δεύτερος $\frac{136}{27}$.

Η λύση του Διόφαντου σε σύγχρονο συμβολισμό και σχολιασμό

Το πρόβλημα Δ-24 των αριθμητικών συνίσταται στην εύρεση δυο αριθμών με άθροισμα α δοσμένο έτσι ώστε το γινόμενό τους να ισούται με την διαφορά της πλευράς ενός κύβου, από τον κύβο.

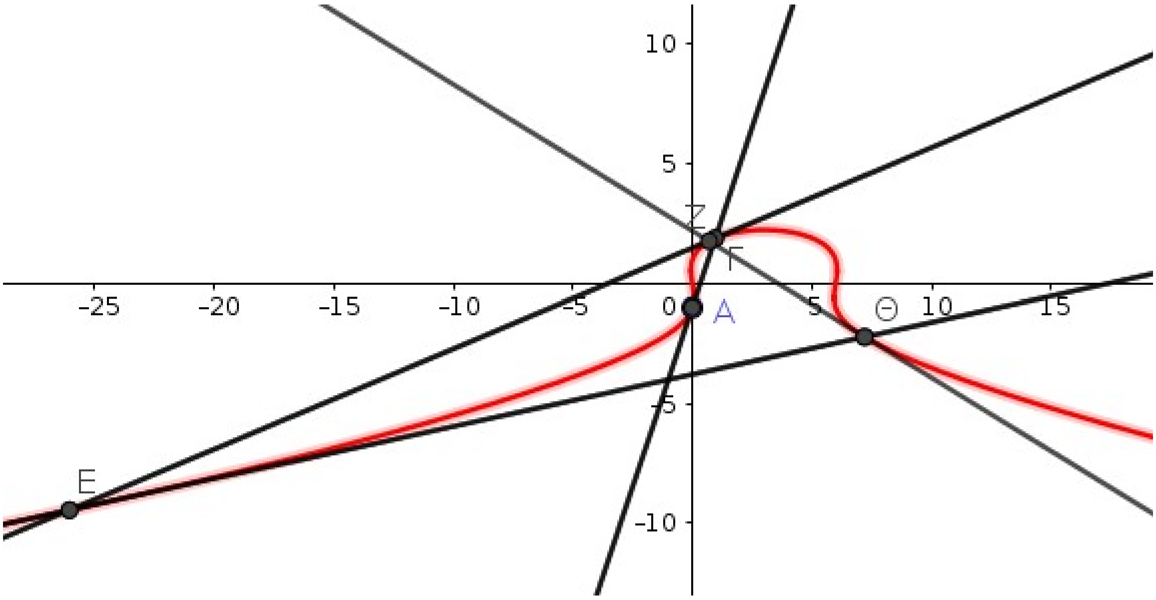
Ο Διόφαντος θεωρεί ότι α=6 και συμβολίζοντας με χ τον έναν από τους δυο ζητούμενους αριθμούς, ο άλλος θα ισούται με 6-χ. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει $\chi(6-\chi)=\psi^3-\psi$ (1). Ο Διόφαντος θεωρεί ότι ψ=κχ-1 (2), όπου το κ θα το επιλέξει κατάλληλα έτσι ώστε το χ να απαλείφεται από τα δυο μέλη της εξίσωσης (1).
Θα έχουμε λοιπόν $\kappa^3\chi^3-3\kappa^2\chi^2+3\kappa\chi-1-(\kappa\chi-1)=6\chi-\chi^2$ (3)
Θέλουμε 3κχ-κχ=6χ δηλαδή 2κχ=6χ οπότε πρέπει κ=3.
Η εξίσωση (3) με κ=3 γίνεται 27χ^3=26χ^2 οπότε έχει τη θετική ρητή λύση χ= $\frac{26}{27}$.
Βρίσκουμε λοιπόν ότι χ= $\frac{26}{27}$ και 6-χ= $\frac{136}{27}$.
Η επιλογή κ=3 από τον Διόφαντο έχει την εξής σύγχρονη γεωμετρική ερμηνεία.
Η εξίσωση (1) παριστάνει στο Καρτεσιανό επίπεδο μια “ελλειπτική” καμπύλη:



Το σημείο Α(0,-1) είναι σημείο της καμπύλης (1). Αντιστοιχεί στην τιμή χ=0 η οποία βεβαίως δεν υφίσταται κατά τον Διόφαντο. Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο Α έχει κλίση κ=3 και η εξίσωσή της είναι ψ=3χ-1 που αντιστοιχεί στην επιλογή του Διόφαντου. Αυτή η εφαπτομένη στο Α τέμνει την καμπύλη (1) στο σημείο Γ του οποίου η τετμημένη είναι χ= $\frac{26}{27}$ που αντιστοιχεί στη λύση του κειμένου των Αριθμητικών. Αυτό δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό της μεθόδου του Διόφαντου ως **“μέθοδος της εφαπτομένης”**, η οποία μαζί με τη **“μέθοδο της χορδής”** που σχολιάσαμε σε προηγούμενα προβλήματα, συνιστούν το βασικό εργαλείο του Διόφαντου για την επίλυση των σχετικών εξισώσεων.

Μια σκέψη για την εύρεση επιπλέον λύσεων της εξίσωσης (1) είναι να επαναλάβουμε τη διαδικασία της μεθόδου της εφαπτομένης, με σημείο εκκίνησης το σημείο Γ. Πράγματι η εφαπτομένη στο Γ τέμνει την καμπύλη στο σημείο Ε, η εφαπτομένη στο Ε επανατέμνει την καμπύλη στο Θ, η εφαπτομομένη στο Θ επανατέμνει την καμπύλη στο Ζ (αρκετά κοντά στο σημείο Γ) και με την προϋπόθεση ότι με την διαδικασία αυτή δεν θα πετύχουμε κάποιο από τα σημεία τομής που έχουμε ήδη βρει, η διαδικασία θα μπορούσε να επαναληφθεί ενδεχομένως επ' άπειρον.

Το



βασικό εδώ είναι ότι η εφαπτομένη σε ένα σημείο της καμπύλης, επανατέμνει την καμπύλη σε ένα ακριβώς νέο σημείο. Έτσι γνωρίζοντας μια ρητή λύση της (1), η μέθοδος εφαπτομένης θα μπορούσε να μας δώσει ακόμα και άπειρες άλλες ρητές λύσεις. Στο ερώτημα που φυσιολογικά τίθεται στο σημείο αυτό, για το αν όλες οι ρητές λύσεις της εξίσωσης (1) μπορούν να παραχθούν με την διαδικασία αυτή, θα επανέλθουμε αργότερα.

Βιβλίο Ε – Πρόβλημα 16

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον ποιῇ κύβον.

Να βρεθούν τρεις αριθμοί τέτοιοι ώστε αν από τον κύβο του αθροίσματός τους αφαιρεθεί ο καθένας εξ' αυτών, να προκύπτει κύβος.

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς ϛ ᾱ, καὶ αὐτῶν πάλιν ὁ μὲν $K^{Y}\ \frac{\eta}{\zeta}$, *ὁ δὲ* $K^{Y}\ \frac{\kappa\zeta}{\kappa\varsigma}$, *ὁ δὲ* $K^{Y}\ \frac{\xi\delta}{\xi\gamma}$.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ϛ ᾱ· γίνεται κυβικόν τι πλῆθος ἴσον ϛ ᾱ. πάντα παρὰ ϛ· καὶ γίνεται Δ^{Y} *τι πλῆθος ἴσον* M̊ ᾱ.

καὶ ἔστιν ἡ M̊ $\square^{o\varsigma}$· *δεήσει ἄρα καὶ τὰς* Δ^{Y} *εἶναι* $\square^{o\nu}$· *πόθεν ἐστὶν τὸ πλῆθος τῶν* Δ^{Y}; *ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς κύβους ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶν* M̊ ᾱ· *καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ἢ* M̊ ᾱ, *τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ* $\square^{o\nu}$.

Θέτουμε πάλι το άθροισμα των τριών αριθμών ίσο με χ και θεωρούμε ότι ο πρώτος είναι $\frac{7}{8}\chi^3$ ο δεύτερος $\frac{26}{27}\chi^3$ και ο τρίτος $\frac{63}{64}\chi^3$.

Θα εξισώσουμε το άθροισμα αυτών με χ. Έτσι θα έχουμε ένα πλήθος κύβων ίσο με χ. Αν τα διαιρέσουμε όλα με χ θα προκύψει ένα πλήθος τετραγώνων ίσο με τη μονάδα.

Η μονάδα είναι τετράγωνος αριθμός, άρα θα πρέπει και το πλήθος των τετραγώνων να είναι τετράγωνος αριθμός. Από πού προέρχεται όμως το πλήθος αυτό των τετραγώνων; Από τη διαφορά του αθροίσματος τριών κύβων από το 3, καθένας εκ των οποίων είναι μικρότερος της μονάδας. Το πρόβλημα επομένως ανάγεται στην εύρεση τριών που ο καθένας είναι μικρότερος της μονάδας, ώστε η διαφορά του αθροίσματός τους από το 3, να δίνει τετράγωνο αριθμό.

καὶ ἔτι ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν κύβον ἐλάσσονα εἶναι $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$, πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$· ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος □ος μείζων εἶναι δυάδος.

τετάχθω ὁ καταλειπόμενος □ος μείζων εἶναι δυάδος· ἔστω $\overset{\circ}{M}\overline{\beta}\,\delta^{\times}$. δεῖ οὖν τὰ $\overset{\delta}{\overline{\gamma}}$ διελεῖν εἰς ⟨τρεῖς⟩ κύβους, καὶ τὰ τούτων πολλαπλάσια κατά τινων

Επιπροσθέτως ζητούμε ο καθένας κύβος να είναι μικρότερος του1. Αν λοιπόν κατασκευάσουμε το άθροισμα όλων των κύβων να είναι μικρότερο του 1, τότε ακόμη περισσότερο ο καθένας εξ' αυτών θα είναι μικρότερος του 1. Επομένως ο τετράγωνος αριθμός που προκύπτει από την διαφορά, οφείλει να είναι μεγαλύτερος του2.

Θεωρώντας ότι ο προκύπτων τετράγωνος είναι μεγαλύτερος του 2, έστω ότι είναι ο $2+\frac{1}{4}$. Θα πρέπει λοιπόν τα $\frac{3}{4}$ να τα αναλύσουμε σε τρεις κύβους, καθώς και τα πολλαπλάσια αυτών τα διαιρεμένα κατά κάποιους κύβους. Έστω κατά του 216. Οφείλουμε επομένως να αναλύσουμε τον 162 σε άθροισμα τριών κύβων.

κύβων διαιρεθέντων. ἔστω δὴ κατὰ τοῦ $\overline{\sigma\iota\varsigma}$· ὀφείλομεν οὖν τὸν $\overline{\rho\xi\beta}$ διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους.

σύγκειται δὲ ὁ $\overline{\rho\xi\beta}$ ἔκ τε κύβου τοῦ $\overline{\rho\kappa\epsilon}$ καὶ δύο κύβων ὑπεροχῆς τοῦ τε $\overline{\xi\delta}$ καὶ τοῦ $\overline{\kappa\zeta}$· ἔχομεν δὲ ἐν τοῖς Πορίσμασιν ὅτι 'πάντων δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ κύβων ⟨δύο σύνθεμά ἐστιν⟩'.

Ο 162 προκύπτει από το άθροισμα του κύβου 125 με τη διαφορά των κύβων 64 και 27. Όπως προκύπτει από τα Πορίσματα, πάντοτε η διαφορά δυο κύβων ισούται με το άθροισμα δυο κύβων.

Ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν ἕκαστον K^{Y} τῶν εὑρεθέντων, τοὺς δὲ τρεῖς ϛ $\overline{\alpha}$· καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν κύβον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ϛ $\overline{\alpha}$· γίνονται δὲ οἱ τρεῖς $K^{Y}\overline{\beta}\,\delta^{\times}$· ταῦτα ἴσα ϛ $\overline{\alpha}$· ὅθεν γίνεται ὁ ϛ γων $\overline{\beta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

Επανερχόμενοι στο αρχικό μας πρόβλημα αντικαθιστούμε τους κύβους που βρήκαμε, και το άθροισμα των τριών ίσο με έναν αριθμό. Τότε συμβαίνει η διαφορά κάθε αριθμού από τον κύβο του αθροίσματός τους να δίνει κύβο.

Αν το άθροισμα των τριών το εξισώσουμε με χ θα έχουμε ότι $2+\frac{1}{4}$ κύβοι ισούνται με χ. Έτσι ο αριθμός χ γίνεται $\frac{2}{3}$ και μπορούν να πάρουν υπόσταση οι ζητούμενοι αριθμοί.

Η λύση του Διόφαντου σε σύγχρονο συμβολισμό

Το πρόβλημα περιγράφεται ως η εύρεση τριών (ρητών) αριθμών z, y, ω έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες

$$\begin{aligned}(z+y+\omega)^3-z&=\alpha^3\\(z+y+\omega)^3-y&=\beta^3\\(z+y+\omega)^3-\omega&=\gamma^3\end{aligned}\qquad(1)$$

Οι αριθμοί α,β,γ δεν είναι παράμετροι με τιμές δοσμένες από την αρχή, αλλά ουσιαστικά συναρτήσεις των z,y,ω.

Ο Διόφαντος ξεκινάει τη λύση του θέτοντας z+y+ω=x, $z=\frac{7}{8}x^3$, $y=\frac{26}{27}x^3$, $\omega=\frac{63}{64}x^3$. (2)

Έτσι θα πρέπει $(\frac{7}{8}+\frac{26}{27}+\frac{63}{64})x^3=x$ και διαιρώντας με x προκύπτει $(\frac{7}{8}+\frac{26}{27}+\frac{63}{64})x^2=1$. Για να έχει ρητή λύση η τελευταία εξίσωση θα πρέπει η παρένθεση να είναι τετράγωνος αριθμός. Στην περίπτωσή μας βέβαια $(\frac{7}{8}+\frac{26}{27}+\frac{63}{64})=\frac{4877}{1728}$ που δεν είναι τετράγωνος αριθμός. Έτσι ο Διόφαντος παρατηρεί ότι $\frac{7}{8}+\frac{26}{27}+\frac{63}{64}$ = $1-\frac{1}{8}+1-\frac{1}{27}+1-\frac{1}{64}=3-(\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64})$ και θεωρεί ότι το πρόβλημα θα είχε λυθεί αν μπορούσαμε να βρούμε τρεις κύβους μικρότερους του 1, έτσι ώστε η διαφορά τους από το 3 να είναι τετράγωνος αριθμός. Στο σημείο αυτό θεωρεί ότι ο τετράγωνος αυτός αριθμός είναι ο $2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$. Υπό αυτές τις συνθήκες αναζητάει αριθμούς κ,λ,μ τέτοιους ώστε $3-(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)=$ $2+\frac{1}{4}$ οπότε $(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)=$ $\frac{3}{4}$. Πολλαπλασιάζει τώρα όλους τους όρους με τον κύβο $216=6^3$, οπότε αρκεί να προσδιορίσει τρεις κύβους k,l,m έτσι ώστε $k^3+l^3+m^3=162$.

Είναι όμως $162=125+(64-27)=5^3+(4^3-3^3)$. Ο Διόφαντος τώρα επικαλείται μια πρόταση την οποία θεωρεί γνωστή από τα “Πορίσματα”, σύμφωνα με την οποία η διαφορά δυο κύβων μπορεί πάντα να γραφεί ως άθροισμα δυο κύβων. Έτσι τελικά ο 162 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τριών κύβων. Ο Διόφαντος δεν δίνει κανέναν υπολογισμό για το πως μπορεί να γίνει αυτό, ούτε και κανέναν υπολογισμό για τη συνέχεια. Αναφέρει κατευθείαν ότι ο ζητούμενος αριθμός χ ισούται με $\frac{2}{3}$ και ότι πλέον μπορούμε να βρούμε και τους υπόλοιπους αριθμούς z,y,ω οι οποίοι ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Σχόλια

- Όπως είδαμε παραπάνω, μια πρόταση “κλειδί” για τη λύση που δίνει ο Διόφαντος στο κείμενό του, είναι η πρόταση ότι η διαφορά δυο κύβων μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δυο κύβων. Πώς μπορεί όμως να γίνει αυτό; Η απάντηση δεν δίνεται στο κείμενο και η απόδειξη του Διόφαντου στα Πορίσματα, δεν έχει διασωθεί. Ο Γάλλος μαθηματικός Φρανσουά Βιέτ (F. Vieta 1540-1693), απέδειξε τους εξής τύπους για την επίλυση αυτού του προβλήματος:
  Οι αριθμοί $\chi=\frac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3}(\alpha^3-2\beta^3),\quad \psi=\frac{\beta}{\alpha^3+\beta^3}(2\alpha^3-\beta^3)$ (3) ικανοποιούν την εξίσωση $\chi^3+\psi^3=\alpha^3-\beta^3$. (4) Για να παραχθούν αυτή οι τύποι, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη γνωστή μας πλέον μέθοδο “χορδής – εφαπτομένης”. (Η απόδειξη του Βιέτ δεν είναι ακριβώς έτσι.) Το ζεύγος (χ,ψ)=(α,-β) αποτελεί μια προφανή λύση της εξίσωσης. Η εξίσωση μιας τυχαίας (μη παράλληλης στον άξονα ψ΄ψ) ευθείας που διέρχεται από το σημείο (α,-β) είναι η ψ=λ(χ-α)-β με $\lambda\in\mathbb{Q}$ (5). Αντικαθιστώντας στην (4) παίρνουμε την εξίσωση $\chi^3+\lambda^3(\chi-\alpha)^3-3\lambda^2(\chi-\alpha)^2\beta+3\lambda(\chi-\alpha)\beta^2-\alpha^3=0$ (6). Παραγοντοποιώντας προκύπτει $(\chi-\alpha)[\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2+\lambda^3(\chi-\alpha)^2-3\lambda^2(\chi-\alpha)\beta+3\lambda\beta^2)]=0$ οπότε χ=α (τετριμμένη λύση) ή $\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2+\lambda^3(\chi-\alpha)^2-3\lambda^2(\chi-\alpha)\beta+3\lambda\beta^2)=0$ (7). Αν επιλέξουμε το λ έτσι ώστε το τριώνυμο αυτό να έχει ρίζα το α, τότε πρέπει $3\alpha^2+3\lambda\beta^2=0$ άρα $\lambda=\frac{-\alpha^2}{\beta^2}$ (8). Υπό αυτή τη συνθήκη η (7) γράφεται $(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)+\alpha(\chi-\alpha)+\lambda^3(\chi-\alpha)^2-3\lambda^2(\chi-\alpha)\beta=0$ οπότε εκτός τη ρίζα χ=α που αντιστοιχεί στον παράγοντα χ-α θα έχουμε και $(1+\lambda^3)\chi+2\alpha-\lambda^3\alpha-3\lambda^2\beta=0$ ή $(1-\frac{\alpha^6}{\beta^6})\chi+2\alpha+\frac{\alpha^6}{\beta^6}\alpha-3\frac{\alpha^4}{\beta^4}\beta=0 \quad\Leftrightarrow$
  $$(\beta^6-\alpha^6)\chi+2\alpha\beta^6+\alpha^7-3\alpha^4\beta^3=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\beta^3+\alpha^3)(\beta^3-\alpha^3)\chi+\alpha(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3-2\beta^3)=0$$
  $$\Leftrightarrow\quad \chi=\frac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3}(\alpha^3-2\beta^3),\quad \psi=\frac{\beta}{\alpha^3+\beta^3}(2\alpha^3-\beta^3)\ .$$
  Γενικότερα για να έχει η (7) ρητές ρίζες θα πρέπει η διακρίνουσά της Δ να είναι τέλειο τετράγωνο όπου $\Delta=-3(\lambda^4\beta^2+4\lambda^3\alpha^2+6\lambda^2\alpha\beta+4\lambda\beta^2+\alpha^2)$.
- Εφαρμόζοντας τους τύπους (3) μπορούμε να βρούμε πως γράφεται σαν άθροισμα κύβων η παράσταση 4^3-3^3. Οι τύποι λοιπόν (3) με α=4 και β=3 δίνουν $\chi=\frac{40}{91},\quad \psi=\frac{303}{91}$ δηλαδή θα έχουμε $4^3-3^3=(\frac{40}{91})^3+(\frac{303}{91})^3$.
- Οι αριθμοί k,l,m της λύσης του Διόφαντου θα είναι k=5, l= $l=\frac{40}{91},\quad m=\frac{303}{91}$. Επομένως οι αριθμοί κ,λ,μ θα προκύπτουν από τους k,l,m διαιρώντας με το 6. Έτσι

$\kappa=\frac{5}{6},\ \lambda=\frac{20}{273},\ \mu=\frac{101}{182}$.

- Ακολουθώντας τώρα τα βήματα του Διόφαντου θα έχουμε

  $z=[1-(\frac{5}{6})^3]x^3$, $y=[1-(\frac{20}{273})^3]x^3$, $\omega=[1-(\frac{101}{182})^3]x^3$ (9)

  Όμως z+y+ω=χ και από τις (9) προκύπτει $(3-\frac{3}{4})x^3=x$ άρα χ= $\frac{2}{3}$. Από τους τύπους (9) θα είναι επομένως

  $z=\frac{728}{5832}$, $y=\frac{20338417}{20346417}\cdot\frac{8}{27}=\frac{162707336}{549353259}$, $\omega=\frac{4998267}{6028568}\cdot\frac{8}{27}=\frac{39986136}{162771336}$.

Βιβλίο ΣΤ – Πρόβλημα 3

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον.

Να βρεθεί ορθογώνιο τρίγωνο, τέτοιο ώστε αν στο εμβαδόν του προστεθεί δοθείς αριθμός, να δίνει άθροισμα τετράγωνο αριθμό.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ ε̄

καὶ τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ς γ̄, ς δ̄, ς ε̄, καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ Μ̊ ε̄, Δ^{Y} ϛ̄ Μ̊ ε̄ ἴσ. □φ.

ἔστω ἴσ. Δ^{Y} θ̄· καὶ ἀπὸ τῶν ὁμοίων τὰ ὅμοια· λοιπαὶ Δ^{Y} γ̄ ἴσ. Μ̊ ε̄. καὶ δεῖ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν □ος ἀριθμὸς πρὸς □ον ἀριθμόν. [ὀφείλει καὶ τὸ πλῆθος πρὸς τὸ πλῆθος·] καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ □ον ἀριθμὸν ὅπως ὁ □ος λείψας τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ τοῦ τριγώνου ποιῇ εον τετραγώνου, ἐπειδήπερ ὁ δοθεὶς Μ̊ ε̄ ἐστίν.

Έστω ότι ο δοθείς αριθμός είναι ο 5.

Θέτουμε το τρίγωνο να έχει μήκη πλευρών 3χ, 4χ, 5χ, οπότε το εμβαδόν μαζί με τις 5 μονάδες γίνεται $6χ^2+5$. Θα πρέπει $6χ^2+5$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

Έστω ότι το τετράγωνο είναι ίσο με $9χ^2$. Αφαιρώντας τους όμοιους όρους προκύπτει $3χ^2=5$. Πρέπει ο λόγος των ειδών να είναι ίσος με το λόγο που έχει τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό. Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ορθογωνίου τριγώνου και τετράγωνου αριθμού, ώστε όταν ο τετράγωνος ελαττωθεί κατά το εμβαδόν του τριγώνου να δίνει το ένα πέμπτο του τετραγώνου, επειδή τέλος πάντων ο δοθείς αριθμός είναι ο 5.

πεπλάσθω ⟨τὸ τρίγωνον ἀπὸ⟩ ς ᾱ ⟨καὶ ς$^{×}$ ᾱ⟩, καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ Δ^{Y} ᾱ ⟨⋔ $\Delta^{Y×}$ ᾱ⟩· ἔστω ἡ τοῦ □ου πλευρὰ ς ᾱ καὶ ς$^{×}$ τοσούτων ὅσων ἐστὶν ὁ διπλάσιος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τουτέστιν ς$^{×}$ ῑ. καὶ γίνεται ὁ □ος Δ^{Y} ᾱ $\Delta^{Y×}$ ρ̄ Μ̊ κ̄. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἄρωμεν τὸ ἐμβαδόν, τουτέστιν Δ^{Y} ᾱ ⟨⋔ $\Delta^{Y×}$ ᾱ⟩, λοιπὸν γίνεται $\Delta^{Y×}$ ρ̄ᾱ Μ̊ κ̄· ταῦτα εκις. γίνεται $\Delta^{Y×}$ φ̄ε̄ Μ̊ ρ̄ ἴσος ὁ □ος. καὶ

Θα κατασκευάσουμε το τρίγωνο από τον αριθμό χ και το αριθμοστό $\frac{1}{χ}$. Το εμβαδόν του τριγώνου τότε γίνεται $\chi^2-\frac{1}{\chi^2}$. Έστω ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι χ και τόσα αριθμοστά $\frac{1}{x}$ όσο το διπλάσιο του δοθέντα αριθμού, δηλαδή $\frac{10}{x}$. Τότε το τετράγωνο γίνεται $\chi^2+\frac{100}{x^2}+20$ και αν από αυτό αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου $\chi^2-\frac{1}{\chi^2}$ προκύπτει $\frac{101}{x^2}+20$. Πολλαπλασιάζοντας επί 5 έχουμε ότι $\frac{505}{x^2}+100$ ισούται με τετράγωνο και πολλαπλασιάζοντας επί χ^2 προκύπτει ότι $100\chi^2+505$ ισούται με τετράγωνο, έστω πλευράς 10χ+5. Έτσι βρίσκουμε ότι ο άγνωστος είναι $\chi=\frac{24}{5}$.

πάντα ἐπὶ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$· γίνονται $\Delta^{Y}\,\overline{\varrho}$ $\mathring{M}\,\overline{\varphi\varepsilon}$ ἴσ. ⟨□⟩· ἔστω ἴσ. τῷ ἀπὸ πλ. ς $\overline{\iota}$ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$· ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς εων $\overline{\kappa\delta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ $\frac{\varepsilon}{\kappa\delta}$ καὶ $\frac{\kappa\delta}{\varepsilon}$, ἡ δὲ τοῦ □^ου^ πλ. $\frac{\xi}{\upsilon\iota\gamma}$· ἐὰν οὖν τὸ ὀρθογώνιον τάξωμεν ἐν ς, καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$ ποιῶμεν ἴσον $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\zeta}$. $\frac{\gamma\chi}{\varphi\xi\theta}$, ἔσται ἡμῖν τὰ λοιπὰ δῆλα.

Υπό αυτά τα δεδομένα κατασκευάζουμε το τρίγωνο από τους αριθμούς $\frac{24}{5}$ και $\frac{5}{24}$, ενώ την πλευρά του τετραγώνου $\frac{413}{60}$. Αν τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου τις πολλαπλασιάσουμε επί έναν αριθμό χ και ύστερα στο εμβαδόν του προσθέσουμε 5, θα βρούμε αποτέλεσμα ίσο με $\frac{170569}{3600}\chi^2$ και τα υπόλοιπα της επίλυσης είναι φανερά.

Η λύση του Διόφαντου σε σύγχρονο συμβολισμό (1)

Έστω ότι ο δοθείς αριθμός είναι ο 5.

Θέτουμε το τρίγωνο να έχει μήκη πλευρών 3χ, 4χ, 5χ, οπότε το εμβαδόν μαζί με τις 5 μονάδες γίνεται $6\chi^2+5$. Θα πρέπει $6\chi^2+5$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

Έστω ότι το τετράγωνο είναι ίσο με $9\chi^2$. Άρα $6\chi^2+5=9\chi^2$ οπότε προκύπτει $3\chi^2=5$. Όμως αφού ο $\frac{5}{3}$ δεν είναι τετράγωνο ρητού η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη. Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ορθογωνίου τριγώνου και τετράγωνου αριθμού, ώστε όταν ο τετράγωνος ελαττωθεί κατά το εμβαδόν του τριγώνου να δίνει το ένα πέμπτο του τετραγώνου.

Στη συνέχεια ο Διόφαντος θεωρεί γνωστό το γεγονός ότι δοθέντων των αριθμών κ,λ με κ>λ το τρίγωνο με πλευρές τις 2κλ, $\kappa^2-\lambda^2$, $\kappa^2+\lambda^2$ είναι ορθογώνιο και κατασκευάζει το τρίγωνο από τον αριθμό χ και το αριθμοστό $\frac{1}{\chi}$. Το εμβαδόν του τριγώνου τότε γίνεται $\chi^2-\frac{1}{\chi^2}$. Θεωρεί τώρα ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι $\chi+\frac{10}{\chi}$. Τότε το τετράγωνο γίνεται $\chi^2+\frac{100}{x^2}+20$ και αν από αυτό αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου $\chi^2-\frac{1}{\chi^2}$ προκύπτει $\frac{101}{x^2}+20$. Πολλαπλασιάζοντας επί 5 έχουμε ότι $\frac{505}{x^2}+100$ ισούται με τετράγωνο και πολλαπλασιάζοντας επί χ^2 προκύπτει ότι $100\chi^2+505$ ισούται με τετράγωνο, έστω πλευράς 10χ+5. Έτσι βρίσκουμε ότι $100\chi^2+505=100\chi^2+100\chi+25$ οπότε $100\chi=480$ συνεπώς $\chi=\frac{24}{5}$.

Έτσι το κατασκευασθέν τρίγωνο θα έχει πλευρές $2\chi\frac{1}{\chi}=2$, $\chi^2-\frac{1}{x^2}=\frac{576}{25}-\frac{25}{576}=\frac{331151}{14400}$, $\chi^2+\frac{1}{x^2}=\frac{576}{25}+\frac{25}{576}=\frac{332401}{14400}$ εμβαδόν $\chi^2-\frac{1}{x^2}=\frac{576}{25}-\frac{25}{576}=\frac{331151}{14400}$. Η πλευρά του τετραγώνου σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι $\omega=\chi+\frac{10}{\chi}=\frac{413}{60}$ και το εμβαδόν του $(\frac{413}{60})^2=\frac{170569}{3600}$.

Επιστρέφοντας τώρα στο αρχικό πρόβλημα θεωρεί ότι το τρίγωνο που ζητείται στην κατασκευή έχει πλευρές $\alpha=\frac{332401}{14400}\chi$, β=2χ, $\gamma=\frac{331151}{14400}\chi$ οπότε η απαιτούμενη συνθήκη $\frac{\beta\gamma}{2}+5=\omega^2$ γίνεται $\frac{331151}{14400}\chi^2+5=\frac{170569}{3600}\chi^2$ ή $\frac{14045}{576}\chi^2=5$ οπότε $\chi=\frac{24}{53}$ και το ζητούμενο τρίγωνο θα έχει πλευρές $\alpha=\frac{332401}{14400}\chi=\frac{332401}{14400}\cdot\frac{24}{53}=\frac{332401}{31800}$, β=2χ= $\frac{48}{53}$, $\gamma=\frac{331151}{14400}\chi=\frac{331151}{31800}$.

Η λύση του Διόφαντου σε σύγχρονο συμβολισμό (2)

Ας δούμε για άλλη μια φορά την προσέγγιση του Διόφαντου, χωρίς όμως τώρα να χρησιμοποιήσουμε τις συγκεκριμένες τιμές που αυτός θέτει στις παραμέτρους του προβλήματος. Με τη γενική αυτή θεώρηση θα γίνει πιο διάφανη η λογική της επίλυσης.

Το πρόβλημα λοιπόν συνίσταται στην εύρεση των (ρητών) αριθμών χ,ψ,ω για τους οποίους ισχύουν οι συνθήκες

$$\begin{aligned} &\chi^2+\psi^2=\omega^2 \\ &\frac{\chi\psi}{2}+\kappa=\tau\varepsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu o\varsigma \end{aligned} \quad (1)$$

Θέτουμε $\chi=\beta\cdot\xi,\quad \psi=\gamma\cdot\xi,\quad \omega=\alpha\cdot\xi$ (2)
Τότε θα ισχύει $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$, δηλαδή οι αριθμοί α,β,γ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου. Από την δεύτερη σχέση των (1) βρίσκουμε $\frac{1}{2}\chi\psi+\kappa=\frac{1}{2}\beta\gamma\xi^2+\kappa$. Θεωρούμε ότι ο τετράγωνος αριθμός που εμφανίζεται στη δεύτερη σχέση των (1) είναι της μορφής $\nu^2\xi^2$ (3). Τότε θα πρέπει να ισχύει $\frac{1}{2}\beta\gamma\xi^2+\kappa=\nu^2\xi^2\Leftrightarrow\xi^2\left(\nu^2-\frac{\beta\gamma}{2}\right)=\kappa\Leftrightarrow\xi^2=\frac{\kappa}{\nu^2-\frac{\beta\gamma}{2}}=\frac{\kappa^2}{\kappa\left(\nu^2-\frac{\beta\gamma}{2}\right)}$ (4) . Θα πρέπει ο παρονομαστής του τελευταίου κλάσματος να είναι τετράγωνος αριθμός.
Όπως σημειώσαμε παραπάνω, οι αριθμοί α,β,γ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, το οποίο τώρα το κατασκευάζουμε με πλευρές $\beta=\mu^2-\frac{1}{\mu^2},\quad \gamma=2,\quad \alpha=\mu^2+\frac{1}{\mu^2}$ (5). Θα έχουμε λοιπόν $\frac{\beta\gamma}{2}=\mu^2-\frac{1}{\mu^2}$ και αν θεωρήσουμε ότι $\nu^2=\left(\mu+\frac{2\kappa}{\mu}\right)^2$ (6), θα είναι $\nu^2-\frac{\beta\gamma}{2}=\left(\mu+\frac{2\kappa}{\mu}\right)^2-\left(\mu^2-\frac{1}{\mu^2}\right)=4\kappa+\frac{4\kappa^2+1}{\mu^2}$.
Πρέπει ο αριθμός $\kappa\left(\nu^2-\frac{\beta\gamma}{2}\right)=4\kappa^2+\frac{\kappa\left(4\kappa^2+1\right)}{\mu^2}=\frac{4\kappa^2\mu^2+\kappa\left(4\kappa^2+1\right)}{\mu^2}$ να είναι τετράγωνος, συνεπώς ο αριθμητής $4\kappa^2\mu^2+\kappa(4\kappa^2+1)$ πρέπει να είναι τετράγωνος.
Θεωρούμε ότι $4\kappa^2\mu^2+\kappa\left(4\kappa^2+1\right)=\left(2\kappa\mu+\lambda\right)^2$ (7). Η εξίσωση (7) όταν κ,λ>0 έχει πάντοτε μια λύση ως προς μ και μάλιστα $\mu=\frac{\kappa\left(4\kappa^2+1\right)-\lambda^2}{2\kappa\lambda}$ (8). Επιλέγοντας κατάλληλα τον λ, πχ λ=κ, θα είναι μ>0.
Έτσι υπολογίζουμε τον μ από την (8). Οι σχέσεις (5) καθορίζουν τους αριθμούς α,β,γ και η σχέση (6) τον αριθμό ν. Από την (4) πλέον καθορίζεται ο ξ κι έτσι οι τύποι (2) μας παρέχουν τελικά λύση του αρχικού προβλήματος.

Σχόλια

- Στα 1670 έγινε μια **δεύτερη έκδοση της μετάφρασης των Αριθμητικών του Bachet** από τον γιό του Fermat, Clement Samuel Fermat, ο οποίος έγινε ο εκτελεστής της επιστημονικής διαθήκης του πατέρα του. Δυστυχώς αυτή η δεύτερη μετάφραση είναι αρκετά απρόσεκτη, όμως έχει ιδιαίτερη ιστορική σημασία γιατί περιέχει ενσωματωμένες στο κείμενο τις περίφημες σημειώσεις που έκανε ο Φερμά στο περιθώριο, σημειώσεις που προκάλεσαν πολλές έρευνες στη θεωρία αριθμών.

- Για τον Διόφαντο το μηδέν δεν υφίστατο ως αριθμητική οντότητα. Όμως για τους κατοπινούς μελετητές του έργου του, στα πλαίσια του 3ου προβλήματος του έκτου βιβλίου των Αριθμητικών, θα είχε νόημα η αναζήτηση ορθογωνίου τριγώνου του οποίου το εμβαδόν να είναι τέλειο τετράγωνο. Κάτι τέτοιο έγινε αντικείμενο έρευνας από τον P. De **Fermat**, ο οποίος ισχυρίστηκε ότι **δεν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές ακέραιους αριθμούς και εμβαδόν τέλειο τετράγωνο.** Γραπτή απόδειξη αυτού του ισχυρισμού του Fermat δεν έχει βρεθεί. Ο ίδιος ισχυριζόταν σε επιστολές του προς φίλους και γνωστούς μαθηματικούς της εποχής του, ότι κατάφερε να αποδείξει αυτό το γεγονός με τη βοήθεια μιας ειδικής μεθόδου δικής του επινόησης. Ειδικότερα, σε μια επιστολή τον Αύγουστο του 1659 προς τον Carcavi, περιγράφει αυτή τη μέθοδο η οποία στις μέρες μας είναι γνωστή με την ονομασία "**ατέρμονη κάθοδος**". Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου για την παραπάνω πρόταση συνίσταται στο εξής: Υποθέτουμε ότι υπάρχει τρίγωνο με ακέραιες πλευρές και εμβαδόν τέλειο τετράγωνο. Τότε αποδεικνύουμε ότι υπάρχει επίσης ένα άλλο ορθογώνιο τρίγωνο ακεραίων πλευρών, με εμβαδόν τέλειο τετράγωνο, του οποίου οι πλευρές είναι γνησίως μικρότερες από τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Συνεχίζοντας, αυτή η διαδικασία κατασκευής μπορεί να επαναληφθεί ξανά και ξανά επ' άπειρον δίνοντας έτσι ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές διαρκώς μικρότερες. Αυτό όμως είναι προφανώς άτοπο αφού για ένα φυσικό αριθμό, υπάρχουν πεπερασμένου μόνο πλήθους φυσικοί αριθμοί που να είναι μικρότεροι από αυτόν.
  Ας υλοποιήσουμε τις παραπάνω ιδέες. Έστω ότι υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές τους θετικούς ακέραιους αριθμούς χ,ψ,ω ώστε $\chi^2+\psi^2=\omega^2$ (1) και $\frac{1}{2}\chi\psi=\delta^2$ (2)
  Αφού η τριάδα (χ,ψ,ω) είναι Πυθαγόρεια, θα υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί α,β,τ έτσι ώστε να ισχύει $\chi=\tau\cdot 2\alpha\beta$, $\psi=\tau\cdot(\alpha^2-\beta^2)$, $\omega=\tau\cdot(\alpha^2+\beta^2)$ (3) με (α,β)=1, αβ άρτιος, α>β.
  Είναι $\frac{1}{2}\chi\psi=\delta^2$ άρα $\frac{1}{2}\tau^2 2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=\delta^2\Leftrightarrow\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=(\frac{\delta}{\tau})^2$ όπου δ/τ ακέραιος
  Αφού (α,β)=1 θα είναι επίσης $(\alpha\beta,\alpha^2-\beta^2)=1$, κι επομένως θα πρέπει οι αβ και $\alpha^2-\beta^2$ να είναι τέλεια τετράγωνα. Όμως $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ και (α-β,α+β)=1, άρα και οι α-β, α+β θα πρέπει να είναι τέλεια τετράγωνα. Συνοψίζοντας λοιπόν θα πρέπει $\alpha=\kappa^2$, $\beta=\lambda^2$, $\alpha+\beta=\mu^2$, $\alpha-\beta=\nu^2$ (4) με κ,λ,μ,ν φυσικούς αριθμούς. Από την $\alpha+\beta=\mu^2$ προκύπτει $\kappa^2+\lambda^2=\mu^2$ (5) ενώ από την $\alpha-\beta=\nu^2$ προκύπτει $\kappa^2-\lambda^2=\nu^2$ (6). Είναι φανερό ότι οι αριθμοί κ,λ,μ,ν είναι ανά δυο πρώτοι μεταξύ

τους. Από τις σχέσεις (5),(6) προκύπτει $\kappa^4-\lambda^4=(\mu\nu)^2$ γεγονός που σημαίνει ότι οι αριθμοί $\lambda^2,\mu\nu,\kappa^2$ αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα με $(\lambda^2,\mu\nu)=1$. Θα υπάρχουν επομένως ακέραιοι θ,ξ τέτοιοι ώστε $\lambda^2=2\theta\xi$, $\mu\nu=\theta^2-\xi^2$, $\kappa^2=\theta^2+\xi^2$. (7) με $(\theta,\xi)=1$, θξ άρτιος, θ>ξ. Από την τελευταία εξίσωση των σχέσεων (7) προκύπτει ότι το τρίγωνο με μήκη πλευρών θ,ξ,κ είναι ορθογώνιο με εμβαδόν $\frac{1}{2}\theta\xi=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$. (Επειδή $\lambda^2=2\theta\xi$, $2/\lambda^2$ άρα 2/λ, δηλαδή ο αριθμός λ/2 είναι ακέραιος). Παρατηρούμε τώρα ότι $\xi<\lambda^2=\beta<\chi$, $\kappa<\kappa^2=\alpha<\alpha^2+\beta^2\leqslant\omega$, $\theta<\kappa<\alpha<\alpha+\beta<\psi$. Βρήκαμε λοιπόν νέο ορθογώνιο τρίγωνο, με ακέραιες πλευρές γνησίως μικρότερες από τις πλευρές του αρχικού τριγώνου, και εμβαδόν τέλειο τετράγωνο. Σύμφωνα επομένως με τη μέθοδο του Fermat που αναπτύξαμε παραπάνω αυτό οδηγεί σε άτοπο. Συμπεραίνουμε έτσι ότι δεν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές ακέραιους αριθμούς και εμβαδόν ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

- Το παραπάνω αποτέλεσμα του ισχυρισμού του Fermat, μπορεί να μας οδηγήσει σε μια **απόδειξη του Τελευταίου θεωρήματος του Fermat για τον εκθέτη ν=4**. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση $\chi^4+\psi^4=\omega^4$ έχει λύση και θέσουμε $A=\psi^4$, $B=2\chi^2\omega^2$, $\Gamma=\chi^4+\omega^4$, $\Delta=\psi^2\chi\omega$, τότε $A^2+B^2=(\omega^4-\chi^4)^2+4\chi^4\omega^4=(\omega^4+\chi^4)^2=\Gamma^2$. Δηλαδή $A^2+B^2=\Gamma^2$ οπότε το τρίγωνο με μήκη πλευρών Α,Β,Γ είναι ορθογώνιο.

  Το εμβαδόν του τριγώνου αυτού είναι $\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\psi^4 2\chi^2\omega^2=(\psi^2\chi\omega)^2=\Delta^2$ δηλαδή είναι τέλειο τετράγωνο. Σύμφωνα όμως με την προηγούμενη πρόταση αυτό είναι αδύνατο. Άρα η εξίσωση $\chi^4+\psi^4=\omega^4$ δεν έχει (μη τετριμμένες) ακέραιες λύσεις.

Βιβλίο ΣΤ – Πρόβλημα 18

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος.

Να βρεθεί ορθογώνιο τρίγωνο τέτοιο ώστε αν στο εμβαδόν του προστεθεί η υποτείνουσα του, να προκύπτει κύβος, ενώ η περίμετρός του να είναι τετράγωνος αριθμός.

Ἐὰν δὴ ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου τάξωμεν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ϛ $\overline{α}$, τὸν δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ Μ̊ κυβικῶν ⋔ ϛ $\overline{α}$, ἔρχεται ζητεῖν τίς κύβος μετὰ Μ̊ $\overline{β}$ ποιεῖ τετράγωνον.

Εάν ομοίως με το προηγούμενο πρόβλημα θέσουμε το εμβαδόν ίσο με χ, η υποτείνουσα θα είναι ένας κύβος μείον χ. (Στο σημείο αυτό ο Διόφαντος θεωρεί γνωστές τις τιμές του προηγούμενου προβλήματος Δ-17 των Αριθμητικών, όπου θεώρησε ότι η μια κάθετη πλευρά είναι 2 μονάδες και η δεύτερη κάθετη ίση με χ). Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην εύρεση ενός κύβου, ο οποίος προσλαμβάνοντας δυο μονάδες δίνει τετράγωνο.

Τετάχθω ἡ τοῦ κύβου πλ. ϛ $\overline{α}$ ⋔ Μ̊ $\overline{α}$· ὁ κύβος ⟨μετὰ Μ̊ $\overline{β}$⟩ γίνεται Κ^Υ $\overline{α}$ ϛ $\overline{γ}$ Μ̊ $\overline{α}$ ⋔ Δ^Υ $\overline{γ}$· ἔσται □^ος· ἔστω ἀπὸ πλ. ϛ $\overline{α}$ L′ Μ̊ $\overline{α}$. καὶ γίνεται ὁ ϛ μονάδος $\overline{κα}$ δων. ἔσται ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ $\overline{ιζ}$ δ, αὐτὸς ἄρα ἔσται ξδ / ,δϡιγ ξδ.

Θέτω την πλευρά του κύβου χ-1. Ο κύβος συν τις δυο μονάδες γίνεται $χ^3+3χ+1-3χ^2$ και αυτή η ποσότητα πρέπει να είναι τετράγωνος αριθμός. Έστω ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με $\frac{3}{2}χ+1$.Ο άγνωστος τότε γίνεται x= $\frac{21}{4}$. Άρα η πλευρά του κύβου είναι $\frac{17}{4}$ και ο κύβος θα ισούται με $\frac{4913}{64}$.

Τάσσω πάλιν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ϛ ᾱ, τὴν δὲ ὑποτείνουσαν Μ̊ $\frac{,\delta\text{ϡ}\iota\gamma}{\xi\delta}$ ⋔ ϛ ᾱ· ἔχομεν δὲ καὶ τὴν βάσιν Μ̊ β̄, τὴν δὲ κάθετον ϛ ᾱ. καὶ ἐὰν ἰσάσωμεν τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης □ον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν □οις εὑρήσομεν τὸν ϛ ῥητόν.

Θέτω πάλι το εμβαδόν ίσο με χ, και την υποτείνουσα $\frac{4913}{64}-\chi$. Έχουμε τη βάση ίση με 2 μονάδες και την κάθετη ίση με χ. Αν εξισώσουμε το τετράγωνο της υποτείνουσας με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών, βρίσκουμε τον αριθμό χ να είναι ρητός.

Η λύση του Διόφαντου σε σύγχρονο συμβολισμό και σχόλια

Το πρόβλημα που θέτει ο Διόφαντος διατυπώνεται ως εξής. Αν α,β,γ οι πλευρές του τριγώνου τότε θα πρέπει $\begin{cases} \beta^2+\gamma^2=\alpha^2 \\ \frac{\beta\gamma}{2}+\alpha=\kappa^3 \\ \alpha+\beta+\gamma=\lambda^2 \end{cases}$ (1)

Ο Διόφαντος θέτει $\frac{\beta\gamma}{2}=\chi,\ \beta=2,\ \gamma=\chi$ (2)

Τότε η σχέση $\alpha+\beta+\gamma=\lambda^2$ γίνεται $\kappa^3+2=\lambda^2$ (3)

Θέτοντας την πλευρά του κύβου κ=τ-1 (4) βρίσκει $\tau^3+3\tau+1-3\tau^2=\lambda^2$ και επιλέγοντας λ= $\frac{3}{2}\tau+1$ (5) βρίσκουμε $\tau^3=\frac{21}{4}\tau^2$ οπότε τ= $\frac{21}{4}$. Από την 4 προκύπτει ότι $\kappa=\frac{17}{4}$ οπότε $\kappa^3=\frac{4913}{64}$.

Θέτοντας λοιπόν το εμβαδόν του τριγώνου $\frac{\beta\gamma}{2}=x$ την υποτείνουσα $\alpha=\frac{4913}{64}-x$ και β=2, γ=χ από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο βρίσκουμε $\left(\frac{4913}{64}-x\right)^2=4+\chi^2 \Leftrightarrow \frac{24137569}{4096}+\chi^2-\frac{4913}{32}\chi=4+\chi^2$ κι έτσι $\chi=\frac{24121185}{628864}$. Οι πλευρές του ζητούμενου τριγώνου είναι $\alpha=\frac{24153953}{628864},\ \beta=2,\ \gamma=\frac{24121185}{628864}$.

- Στην επίλυση του προβλήματος αυτού, κάνει την εμφάνισή της άλλη μια “ελλειπτική” καμπύλη. Είναι η καμπύλη που περιγράφεται από την εξίσωση (3) **$\kappa^3+2=\lambda^2$.** Ο Διόφαντος πρέπει να βρει μια θετική ρητή λύση αυτής της εξίσωσης. Οι αλγεβρικές αντικαταστάσεις που κάνει για την εύρεση μιας ρητής λύσης της (3), δεν είναι τυχαίες. Ας δούμε το θέμα υπό το πρίσμα μιας σύγχρονης γεωμετρικής ερμηνείας.
  Θέτοντας κ=χ-1, λ=ψ η (3) μετατρέπεται στην εξίσωση **$\chi^3-3\chi^2+3\chi+1=\psi^2$** (3')
  Μια τετριμμένη (μη υφιστάμενη κατά τον Διόφαντο) λύση της (3) είναι το ζεύγος (0,1).
  Η εφαπτομένη της (3') στο σημείο Α(0,1) έχει κλίση $-\frac{\frac{\partial F}{\partial \chi}}{\frac{\partial F}{\partial \psi}}=\frac{3}{2}$ και άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\psi=\frac{3}{2}\chi+1$ που αντιστοιχεί στην αλγεβρική επιλογή (5) του Διόφαντου.
  Έχουμε λοιπόν άλλη μια εφαρμογή της **μεθόδου της εφαπτομένης** που ξανασυζητήσαμε.

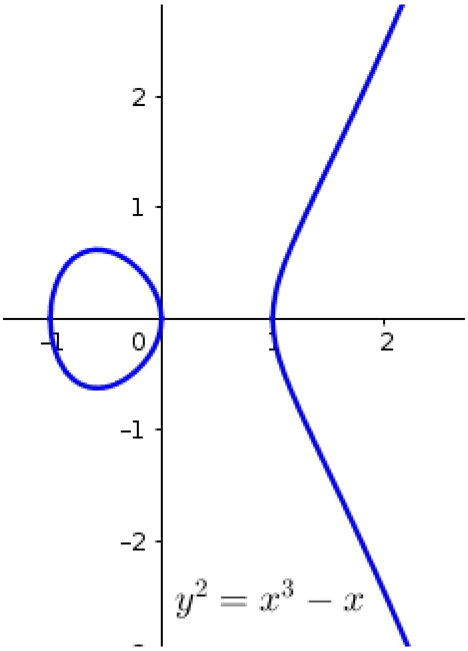
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

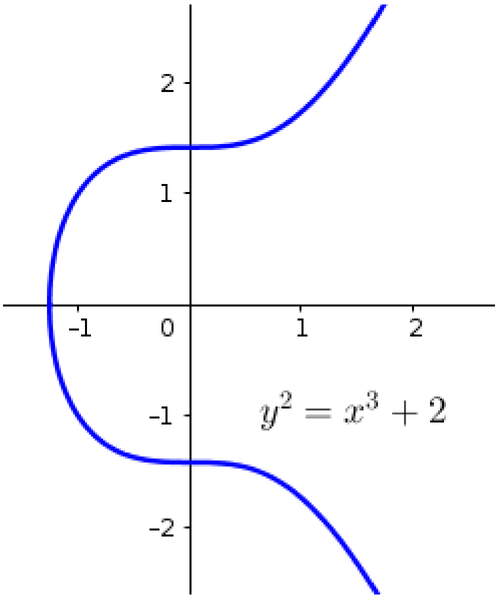
Ελλειπτικές καμπύλες

Όπως είδαμε, στα Αριθμητικά, κατά την προσπάθεια επίλυσης κάποιων προβλημάτων, ο Διόφαντος αναζητάει λύσεις κάποιων εξισώσεων που σήμερα τις αποκαλούμε **"ελλειπτικές εξισώσεις".** Οι γραφικές παραστάσεις των ελλειπτικών εξισώσεων στο επίπεδο λέγονται **ελλειπτικές καμπύλες.**

Μια ελλειπτική καμπύλη υπεράνω του σώματος $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, είναι μια καμπύλη που ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{y^2=ax^3+bx^2+cx+d,\quad a,b,c,d\in\mathbb{Q},\ a\neq 0}$ (1) όπου το τριτοβάθμιο πολυώνυμο στο δεξί μέλος της εξίσωσης δεν έχει πολλαπλές ρίζες.
Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να οριστούν και ελλειπτικές καμπύλες υπεράνω κάποιου άλλου σώματος K με χαρακτηριστική διαφορετική του 2.

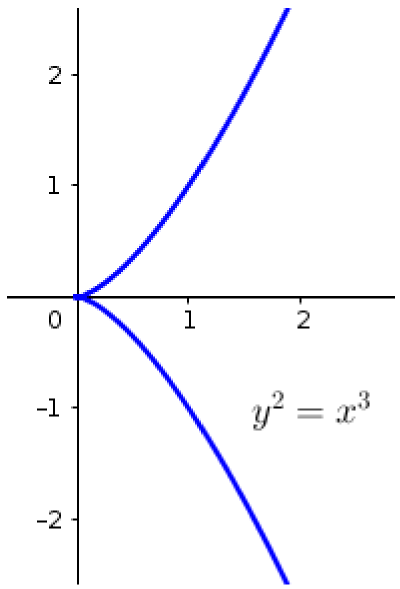
Οι καμπύλες που φαίνονται στις παρακάτω δυο εικόνες είναι ελλειπτικές.

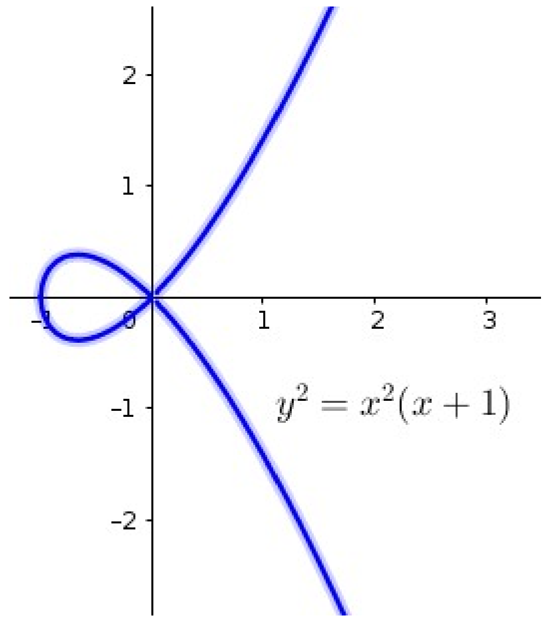




Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Οι καμπύλες των δυο παρακάτω εικόνων δεν είναι ελλειπτικές.





Γραφικά αυτές οι καμπύλες διαφέρουν από τις παραπάνω ελλειπτικές, καθόσον στο σημείο O(0,0) έχουν και οι δυο ένα “ανώμαλο” σημείο.

Γενικά είναι γνωστό ότι μια ελλειπτική καμπύλη υπεράνω του $\mathbb{Q}$ έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος από ακέραια σημεία, δηλαδή σημεία με ακέραιες συντεταγμένες. (Mordell, Siegel). Αφού η καμπύλη για παράδειγμα $ψ^2=χ^3$ δεν είναι ελλειπτική, δικαιολογείται να έχει ακόμη και άπειρο πλήθος ακέραιων σημείων. Πράγματι σε αυτήν τα ζεύγη $(κ^2,κ^3)$ με $κ \in \mathbb{Z}$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $ψ^2=χ^3$. Το γεγονός αυτό υπαινίσσεται ότι η γεωμετρική διαφορά που έχουν οι δυο τελευταίες καμπύλες, συνεπάγεται μια αριθμητική διαφορά στο σύνολο των λύσεων των αντίστοιχων εξισώσεων που αντιστοιχούν στις δυο πρώτες ελλειπτικές καμπύλες.

Όταν, όπως ο Διόφαντος, αναζητούμε λύσεις στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, τότε το πλήθος των λύσεων μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Για παράδειγμα η ελλειπτική καμπύλη $ψ^2=χ^3-χ$ έχει μόνο τις λύσεις (0,0), (-1,0) και (1,0) ενώ η $ψ^2=χ^3-4$ έχει άπειρες ρητές λύσεις. Αν έχουμε ένα ρητό σημείο μια ελλειπτικής καμπύλης, δηλαδή ένα σημείο της καμπύλης με συντεταγμένες ρητούς αριθμούς, τότε υπάρχει τρόπος να βρούμε ένα άλλο ρητό σημείο της καμπύλης; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι γενικά καταφατική. Βρίσκοντας την εφαπτομένη της καμπύλης σε ένα ρητό σημείο της, αυτή μπορεί να τέμνει την καμπύλη σε ακριβώς ένα άλλο (ρητό) σημείο. Θυμηθείτε την περίπτωση της καμπύλης $\chi(6-\chi)=\psi^3-\psi$ που συζητήσαμε στο πρόβλημα Δ-24. Αυτή η καμπύλη είναι ελλειπτική γιατί με την αντικατάσταση Χ=χ-3 έρχεται στη μορφή $X^2=-\psi^3+\psi+9$. Η μελέτη τέτοιων περιπτώσεων οδήγησε σταδιακά τους μαθηματικούς στη συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι μπορούμε να ορίσουμε πάνω στα σημεία που αποτελούν τις λύσεις μιας ελλειπτικής εξίσωσης τη δομή μιας **ομάδας**. Η δομή αυτής της ομάδας αντανακλά πλήρως τη δομή των λύσεων της αντίστοιχης ελλειπτικής εξίσωσης.

Θα δώσουμε τώρα μια σύντομη περιγραφή του τρόπου με τον οποίο μπορεί να οριστεί αυτή η ομάδα για μιαν ελλειπτική καμπύλη. Για τους στόχους αυτής της εργασίας θα περιοριστούμε σε ελλειπτικές καμπύλες υπεράνω του σώματος $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.
Αν λοιπόν θεωρήσουμε την ελλεπτική καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $\boldsymbol{\psi^2=\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta}$, **(1)**, όπου α,β,γ,δ ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{Q}$ με α≠0 τότε ορίζουμε το σύνολο $E(\mathbb{Q})$ ως εξής:

$$E(\mathbb{Q})=\{(\chi,\psi)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\ /\psi^2=\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta\}\cup\{O\}$$

Εδώ το σημείο O δεν είναι το σημείο Ο(0,0), αλλά ένα (ιδεατό) σημείο που θα παίξει το ρόλο του ουδέτερου στοιχείου της ομάδας. (Για τους σκοπούς μας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι το επ' άπειρον σημείο του επιπέδου).
Η δομή της ομάδας μπορεί να οριστεί με βάση τους κανόνες i-iii παρακάτω:

- (i) O είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας.
- (ii) Αν Α,Β ανήκουν στο $E(\mathbb{Q})$, Α≠ O ,Β≠ O , και ΑΒ=(χ,ψ) είναι το τρίτο σημείο τομής μεταξύ της χορδής ΑΒ και της ελλειπτικής καμπύλης που διέρχεται από τα σημεία Α,Β τότε ορίζουμε το άθροισμα Α+Β να είναι το σημείο με συντεταγμένες (χ,-ψ).
- (iii) Αν Α ανήκει στο $E(\mathbb{Q})$, Α≠ O και το Α έχει συντεταγμένες (χ,ψ) τότε το αντίθετο στοιχείο -Α του Α είναι το σημείο με συντεταγμένες (χ,-ψ).

Αν Α= O τότε ορίζουμε O +Α=Α. Αν Β= O τότε Β+ O =Β.
Έστω Α(χ_1,ψ_1) και Β(χ_2,ψ_2) οι συντεταγμένες δυο σημείων της ελλειπτικής καμπύλης, με $A\neq O,\ B\neq O$ και $\chi_1\neq\chi_2$. Τότε σε σχέση με την καμπύλη (1) οι συντεταγμένες του σημείου ΑΒ=(χ_3,ψ_3) δίνονται από τους τύπους

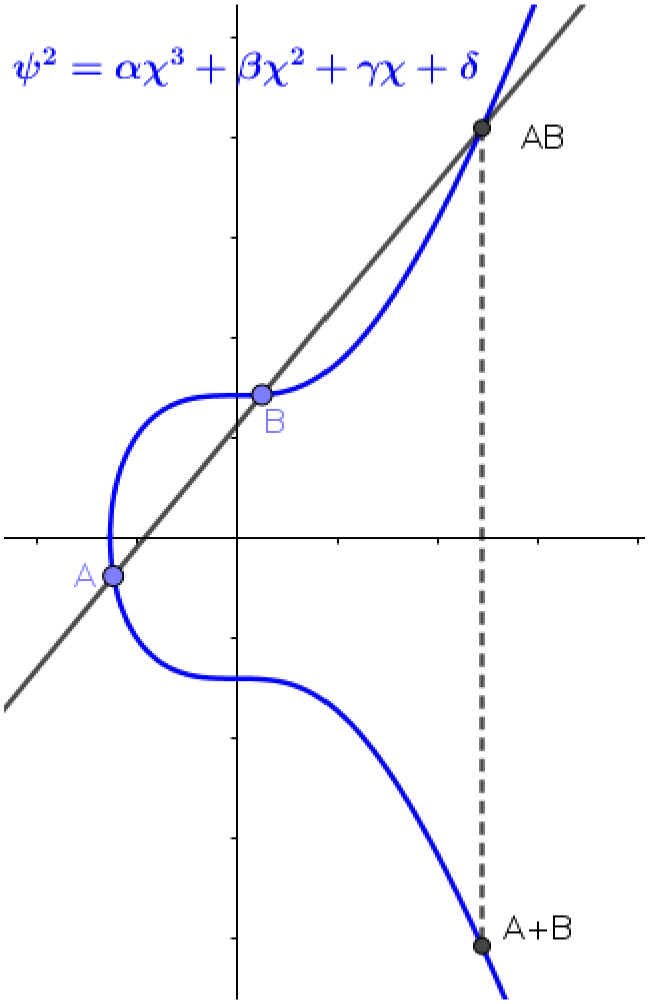
$$\chi_3=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}\right)^2-\frac{\beta}{\alpha}-\chi_1-\chi_2$$
$$\psi_3=-\frac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}\chi_3+\frac{\psi_2\chi_1-\psi_1\chi_2}{x_2-x_1}$$

(2) και το άθροισμα Α+Β έχει συντεταγμένες **Α+Β=($\boldsymbol{\chi_3,-\psi_3}$)**. Αν $\chi_1=\chi_2$ και $\psi_1=-\psi_2$ τότε ορίζουμε $A+B=O$. Αν $\chi_1=\chi_2$και $\psi_1\neq-\psi_2$ τότε είναι Α=Β και $\psi_1\neq0$. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία που συνδέει τα Α,Β ερμηνεύεται ως εφαπτομένη της καμπύλης στο Α και το σημείο ΑΒ=ΑΑ=(χ_3,ψ_3) έχει συντεταγμένες που δίνονται από τους τύπους

$$\chi_3=\frac{1}{4\alpha\psi_1^2}\left(\alpha^2\chi_1^4-2\alpha\gamma\chi_1^2-8\alpha\delta\chi_1+\gamma^2-4\beta\delta\right)$$

$$\psi_3=\frac{1}{8\alpha\psi_1^3}\left(\alpha^3\chi_1^6+2\alpha^2\beta\chi_1^5+5\alpha^2\gamma\chi_1^4\right)\quad+$$
$$\frac{1}{4\alpha\psi_1^2}\left(20\alpha^2\delta\chi_1^3+\left(20\alpha\beta\delta-5\alpha\gamma^2\right)\chi_1^2+\left(8\beta^{2\delta}-2\beta\gamma^2-4\alpha\gamma\delta\right)\chi_1+\left(4\beta\gamma\delta-8\alpha\delta^2-\gamma^3\right)\right)\quad \textbf{(3)}$$

Στην περίπτωση αυτή **A+A=2A=(χ_3,-ψ_3).**



Όπως προαναφέραμε η δομή της ομάδας $E(\mathbb{Q})$ αντανακλά τις ιδιότητες των λύσεων της αντίστοιχης ελλειπτικής εξίσωσης. Το παρακάτω θεώρημα του Mordell, ξεκαθαρίζει σε αδρές γραμμές τη δομή της ομάδας $E(\mathbb{Q})$.

Θεώρημα (Mordell) : Έστω Ε μια ελλειπτική καμπύλη υπεράνω του σώματος $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών. Τότε η ομάδα $E(\mathbb{Q})$ είναι μια π**επερασμένα παραγόμενη αντιμεταθετική ομάδα.**

Τι ακριβώς διατείνεται το παραπάνω θεώρημα; Για κάθε ελλειπτική καμπύλη υπάρχει μια πεπερασμένη συλλογή (ρητών) σημείων της $A_1,A_2,...,A_\rho$ έτσι ώστε κάθε άλλο (ρητό) σημείο της Α μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{A=\nu_1A_1+\nu_2A_2+...+\nu_\rho A_\rho}$ όπου οι συντελεστές $\nu_1,\nu_{2,...},\nu_\rho\in\mathbb{N}$. Με άλλα λόγια, αν μια ελλειπτική καμπύλη έχει ένα ρητό σημείο, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο ρητών σημείων της καμπύλης, έτσι ώστε κάθε άλλο ρητό σημείο να μπορεί να παραχθεί με χρήση της **μεθόδου χορδής και εφαπτομένης**.

Από τη θεωρία των αβελιανών ομάδων, είναι γνωστό ότι μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, είναι ισόμορφη με κάποια ομάδα της μορφής

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z} \oplus$ (πεπερασμένη αβελιανή ομάδα)

Το πλήθος r, των αντιγράφων της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Z}$ στο παραπάνω ευθύ άθροισμα, λέγεται **τάξη** της ελλειπτικής καμπύλης. Η πεπερασμένη ομάδα στο παραπάνω ευθύ άθροισμα, αποτελείται από όλα τα στοιχεία της $E(\mathbb{Q})$ με πεπερασμένη τάξη, και καλείται **ομάδα στρέψης** (torsion group) της $E(\mathbb{Q})$. Για παράδειγμα η καμπύλη $\psi^2=\chi^3-\chi$ έχει τάξη 0, ενώ η καμπύλη $\psi^2=\chi^3-2$ έχει τάξη 1.

Ο Mazur το 1977 απέδειξε ότι το πεπερασμένο κομμάτι στην παραπάνω ανάλυση, οφείλει να είναι μια από τις ομάδες της παρακάτω λίστας:

(1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ όπου $1\le n\le 10$ ή n=12.

(2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ όπου n=2,4,6,8.

Είναι γνωστό ότι κάθε ομάδα από τις παραπάνω εμφανίζεται ως το πεπερασμένο τμήμα της $E(\mathbb{Q})$ για κάποια ελλειπτική καμπύλη Ε.

Οι ελλειπτικές καμπύλες είναι ένα αντικείμενο των μαθηματικών που έχει μελετηθεί εκτεταμένα και υπάρχει ακόμα έντονη δραστηριότητα γύρω απ' αυτό, μέχρι σήμερα. Ας σημειωθεί ότι ακόμη και η απόδειξη του **Andrew J. Wiles** για το τελευταίο θεώρημα του Fermat, σχετίζεται με τις ελλειπτικές καμπύλες και σχετίζεται με την λεγόμενη εικασία **Shimura-Taniyama-Weil** (1957-1967) που διατείνεται ότι κάθε ελλειπτική καμπύλη είναι modular μορφή. Αν και το θέμα αυτό είναι έξω από τους στόχους και τις δυνατότητες της παρούσας εργασίας, το πλαίσιο της απόδειξης του τελευταίου θεωρήματος του Fermat είναι περίπου το εξής: Το 1984 ο Γερμανός Μαθηματικός G. Frey παρατήρησε ότι αν το θεώρημα του Φερμά δεν ίσχυε, δηλαδή αν υπήρχαν μη μηδενικοί ακέραιοι α,β,γ τέτοιοι ώστε $\alpha^\nu+\beta^\nu=\gamma^\nu$ με ν>4 (να σημειωθεί ότι οι περιπτώσεις ν=3 και ν=4 είχαν ήδη αποδειχθεί από τον Euler και τον Fermat αντίστοιχα) τότε θα μπορούσε να κατασκευαστεί μια ελλειπτική καμπύλη της μορφής $ψ^2=χ(χ-α^ν)(χ+β^ν)$ η οποία θα έχει τόσο περίεργες ιδιότητες που ο Φρέι διατύπωσε την εικασία ότι δεν θα μπορούσε να σχετίζεται με κάποια modular μορφή. Την εικασία του Φρέι την απέδειξε τελικά ο Κεν Ρίμπετ το 1986. Αν λοιπόν μπορούσε να αποδειχθεί η εικασία των Shimura-Taniyama-Weil αυτό θα έδινε και μια απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Φερμά. Αυτό ακριβώς πέτυχε να κάνει ο Andrew J. Wiles τουλάχιστον για μια ειδική κατηγορία ελλειπτικών καμπυλών, τις λεγόμενες ημισταθείς ελλειπτικές καμπύλες, στην οποία ανήκει και η καμπύλη του Φρέι. Η εικασία αποδείχτηκε τελικά για όλες τις ελλειπτικές καμπύλες το 2001 από τους Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond, και Richard Taylor.

Στη συνέχεια αυτής της εργασίας θα δούμε τη **σύνδεση της ελλειπτικής εξίσωσης $ψ^2=χ^3-χ$ με την απόδειξη του θεωρήματος του Fermat για τον εκθέτη ν=4.**

Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση $χ^4+ψ^4=ω^4$ έχει λύσεις μη τετριμμένες στους φυσικούς αριθμούς, τότε παρατηρούμε ότι $χ^4=ω^4-ψ^4$ και πολλαπλασιάζοντας τα δυο μέλη της τελευταίας εξίσωσης με $\frac{\omega^2}{\psi^6}$ παίρνουμε την εξίσωση $\left(\frac{\chi^2\omega}{\psi^3}\right)^2=\left(\frac{\omega^2}{\psi^2}\right)^3-\frac{\omega^2}{\psi^2}$. Αυτό σημαίνει ότι δεδομένου πως η (ελλειπτική) εξίσωση $ψ^2=χ^3-χ$ έχει λύση (ρητή) με $ψ≠0$. Αν επομένως μπορέσουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $ψ^2=χ^3-χ$ δεν έχει άλλες λύσεις εκτός των τετριμμένων λύσεων για τις οποίες ψ=0, δηλαδή εκτός των (0,0), (1,0) και (-1,0), αυτό θα οδηγούσε σε αντίφαση με την παραδοχή ότι η εξίσωση του Fermat για τον εκθέτη ν=4 έχει μη τετριμμένη λύση.

Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι

Η ελλειπτική εξίσωση $ψ^2=χ^3-χ$ δεν έχει άλλες ρητές λύσεις εκτός των (0,0), (1,0) και (-1,0).

Στην απόδειξη που θα δώσουμε θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του ύψους ενός ρητού αριθμού, η οποία ορίζεται ως εξής: Αν θεωρήσουμε τον ρητό αριθμό ρ γραμμένο ως ένα κλάσμα ελαχίστων όρων (ανάγωγο κλάσμα), δηλαδή αν $\rho=\frac{\alpha}{\beta}$ με (α,β)=1, τότε ορίζουμε ως **ύψος** του, τον αριθμό **H(ρ)=max{|α|,|β|}**. Για παράδειγμα $H\left(\frac{-7}{12}\right)=12,\ H\left(\frac{2}{3}\right)=3,\ H\left(\frac{20}{15}\right)=4,\ H(0)=1$.

Τώρα το σχέδιο της απόδειξης είναι το παρακάτω:
Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $ψ^2=χ^3-χ$ (1) έχει λύσεις διαφορετικές από τα ζεύγη (0,0), (1,0) και (-1,0). Από τις λύσεις αυτές επιλέγουμε μια της οποίας η χ-συντεταγμένη να έχει το ελάχιστο δυνατό ύψος. Έστω ότι αυτή η λύση είναι το ζεύγος $(χ_0,ψ_0)$. Η στρατηγική της απόδειξης συνίσταται στο να κατασκευάσουμε μια άλλη λύση διαφορετική των (0,0), (1,0) και (-1,0) με μικρότερο ύψος. Σας θυμίζει κάτι αυτό; Είναι ακριβώς η μέθοδος της ατέρμονης καθόδου του Fermat. Έχουμε ήδη δικαιολογήσει γιατί αυτή η μέθοδος εφαρμοζόμενη σταδιακά οδηγεί σε άτοπο. Ξεκινάμε λοιπόν.

Βήμα 1ο : Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\chi_0>1$.

Τα σημεία Ο(0,0) και $A(\chi_0,\psi_0)$ ανήκουν στην καμπύλη Ε που ορίζει η εξίσωση (1). Η χορδή που ενώνει τα σημεία αυτά έχει εξίσωση $\psi=\lambda\chi$ (2) με $\lambda=\frac{\psi_0}{\chi_0}$. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) καταλήγουμε στην εξίσωση $\chi^3-\chi=\lambda^2\chi^2$ ή $\chi^2-\lambda^2\chi-1=0$ (3). Αφού το γινόμενο των ριζών της (3) είναι -1 και μια ρίζα της είναι η χ_0 θα ισχύει για την άλλη ρίζα της χ_1 ότι $\chi_1=-\frac{1}{\chi_0}$ (4). Τότε για την τεταγμένη του τρίτου κοινού σημείου της χορδής ΟΑ και της (Ε) θα έχουμε $\psi_1=\lambda\chi_1=-\frac{\psi_0\chi_1}{\chi_0}=-\frac{\psi_0}{\chi_0^{\;2}}$ (5).

Δείξαμε λοιπόν ότι $\boldsymbol{(\chi_0,\psi_0)\in E\Rightarrow(-\frac{1}{\chi_0},-\frac{\psi_0}{\chi_0^2})\in E}$ και $\boldsymbol{(\chi_0,\psi_0)\in E\Rightarrow(-\frac{1}{\chi_0},\frac{\psi_0}{\chi_0^2})\in E}$ (6)

Δεδομένου ότι για τις λύσεις της (1) πρέπει $-1\leq\chi\leq0$ *ή* $\chi\geq1$ και επειδή $\chi_0\neq0,-1,1$, μπορούμε να υποθέσουμε λόγω της (6) ότι $\chi_0>1$ αφού προφανώς $H(\chi_0)=H(-\frac{1}{x_0})$.

Βήμα 2ο : Αν $\chi_0>1$ και αφού $\chi_0(\chi_0-1)(\chi_0+1)=\psi_0^2$ = τετράγωνο ρητού αριθμού, θα δείξουμε ότι καθένας από τους όρους του παραπάνω γινομένου είναι επίσης τετράγωνο ρητού.

Θεωρούμε τα σημεία $A(\chi_0,\psi_0)$ και Β(1,0). Η εξίσωση της χορδής ΑΒ είναι $\psi=\lambda(\chi-1)$ (7) με $\lambda=\frac{\psi_1}{\chi_1-1}$. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (7) και καταλήγουμε στην επιλύουσα $\chi(\chi-1)(\chi+1)=\lambda^2(\chi-1)^2$, οπότε για $\chi\neq1$ έχουμε $\chi^2+(1-\lambda^2)\chi+\lambda^2=0$ (8). Το γινόμενο των ριζών της (8) είναι λ^2. Αφού επομένως η μια ρίζα της είναι χ_0, η άλλη ρίζα της χ_2 θα είναι

$\chi_2=\frac{\lambda^2}{\chi_0}=\frac{\psi_0^2}{(\chi_0-1)^2\chi_0}=\frac{\chi_0(\chi_0-1)(\chi_0+1)}{(\chi_0-1)^2\chi_0}=\frac{\chi_0+1}{\chi_0-1}$ και η αντίστοιχη τεταγμένη

$\psi_2=\frac{\psi_0}{\chi_0-1}(\chi_2-1)=\frac{2\psi_0}{(\chi_0-1)^2}$. Άρα $\boldsymbol{(\chi_0,\psi_0)\in E\Rightarrow(\frac{\chi_0+1}{x_0-1},\frac{2\psi_0}{(\chi_0-1)^2})\in E}$ (8)

Θέτουμε τώρα $\chi_0=\frac{m}{n}$ με m>n>0 ως ένα κλάσμα ελαχίστων όρων. Επειδή (m,n)=1 οι αριθμοί m,n δεν μπορεί να είναι και οι δυο άρτιοι. Ένας μόνο από τους αριθμούς m,n είναι άρτιος, γιατί αν ήταν και οι δυο περιττοί τότε θέτοντας $\chi'_0=\frac{\chi_0+1}{\chi_0-1}=\frac{\frac{m+n}{2}}{\frac{m-n}{2}}$ το ζεύγος $(\chi'_0,\ \frac{2\psi_0}{(\chi_0-1)^2})$

αποτελεί επίσης λύση της (1) με $H(\chi'_0) \leq max(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}) < max(m,n) = H(\chi_0)$ (9) σχέση η οποία αντιφάσκει με την επιλογή του χ_0. Έτσι ένας από τους m,n είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.

Παρατηρούμε τώρα ότι ο αριθμός $\chi_0(\chi_0-1)(\chi_0+1) = \frac{mn(m-n)(m+n)}{n^4}$ είναι τετράγωνο ενός ρητού αριθμού. Άρα ο αριθμητής mn(m-n)(m+n) είναι τετράγωνο ενός ρητού. Τότε όμως ο αριθμός αυτός οφείλει να είναι τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού. [Πράγματι αν ο ακέραιος α είναι το τετράγωνο ενός ρητού, έστω $\alpha=\mu^2/\nu^2$ και (μ,ν)=1. Τότε $\mu^2=\alpha\nu^2$, δηλαδή ν^2/μ^2 οπότε ν/μ άρα πρέπει ν=1, δηλαδή ο α είναι τετράγωνο ακεραίου.]
αφού (m,n)=1 μπορούμε να δικαιολογήσουμε ότι οι αριθμοί m, n, m-n, m+n είναι ανά δυο πρώτοι μεταξύ τους. Το μόνο μη προφανές αυτού του ισχυρισμού είναι το ζεύγος m-n, m+n. Αν λοιπόν δ είναι ένας κοινός διαιρέτης των m-n, m+n τότε θα πρέπει δ/2m και δ/2n άρα δ/2 αφού οi m, n είναι πρώτοι μεταξύ τους. Τότε όμως οι m-n, m+n θα ήταν άρτιοι και οι δυο, πράγμα που δεν συμβαίνει αφού όπως είδαμε από τους m, n, ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.
Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω όλοι οι αριθμοί m, n, m_n, m+n θα είναι τετράγωνο κάποιου ακεραίου. [Είναι γνωστό ότι αν το γινόμενο κάποιων ακεραίων που αν δυο είναι πρώτοι μεταξύ τους είναι τέλειο τετράγωνο, τότε ο καθένας τους οφείλει να είναι τέλειο τετράγωνο.]
Μετά από όλα τα παραπάνω πλέον είναι φανερό ότι οι αριθμοί
$\chi_0 = \frac{m}{n}$, $\chi_0 - 1 = \frac{m-n}{n}$, $\chi_0 + 1 = \frac{m+n}{n}$ είναι όλοι τους ίσοι με το τετράγωνο κάποιου ρητού.

Βήμα 3ο : Θα αποδείξουμε ότι από τη λύση (χ_0,ψ_0) της (1) η οποία ικανοποιεί τις απαιτήσεις των προηγούμενων βημάτων, μπορούμε να κατασκευάσουμε και άλλη λύση (χ_1,ψ_1) για την οποία ισχύει $H(\chi_1) < H(\chi_0)$ γεγονός που οδηγεί σε αντίφαση.

Η εφαπτομένη της καμπύλης (1) στο σημείο (χ_0,ψ_0) είναι $\psi=\lambda(\chi-\chi_0)+\psi_0$ (10), όπου $\lambda = \frac{3\chi_0^2-1}{2\psi_0}$.

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (10) βρίσκουμε την εξίσωση $\chi^3-\chi=\lambda^2(\chi-\chi_0)^2+2\lambda\psi_0(\chi-\chi_0)+\psi_0^2$ ή ισοδύναμα $\chi^3-\lambda^2\chi^2+(2\lambda^2\chi_o-2\lambda\psi_0-1)\chi+2\lambda\chi_0\psi_o-\lambda^2\chi_o^2-\psi_o^2=0$ (11). Η (11) έχει βεβαίως την προφανή λύση $\chi=\chi_o$ η οποία μάλιστα είναι διπλή λύση γιατί μηδενίζει και την παράγωγο του πολυωνύμου που ορίζεται από το αριστερό μέλος της (11).
Έτσι από τη σχέση που δίνει το γινόμενο των ριζών της (11) θα έχουμε:

$$\chi_0^2\chi_3 = \lambda^2\chi_0^2 + \psi_0^2 - 2\lambda\psi_0\chi_0 \Leftrightarrow \chi_3 = \lambda^2 - 2\chi_0 = \frac{(3\chi_0^2-1)^2}{4(\chi_0^3-\chi_0)} - 2\chi_0 = \frac{(\chi_0^2+1)^2}{4(\chi_0^3-\chi_0)} .$$

Βρήκαμε δηλαδή ότι $\boldsymbol{(\chi_0,\psi_0) \in E \Rightarrow \left(\frac{(\chi_0^2+1)^2}{4(\chi_0^3-\chi_0)}, \frac{3\chi_0^2-1}{2\psi_0}(\chi_3-\chi_0)+\psi_0\right) \in E}$ (12)

Τι αποδείξαμε λοιπόν μέχρι στιγμής στο 3ο βήμα; Δείξαμε ότι η εφαπτομένη της Ε στο τυχαίο ρητό σημείο της (χ_0,ψ_0) με $\chi_0>1$ τέμνει την Ε σε ένα ακριβώς (νέο) ρητό σημείο (χ_3,ψ_3) όπου οι συντεταγμένες του δίνονται από τον τύπο (12). Έστω $f(x)=\frac{(x^2+1)^2}{4(x^3-x)},\ x>1$. Η μελέτη της συνάρτησης f δείχνει ότι το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο R_f= [1,+∞) [μάλιστα $f(1+\sqrt{2})=1$] και ότι η εξίσωση f(x)=x δεν έχει ρητή λύση. Έτσι αν (χ_0,ψ_0) είναι ένα (ρητό) σημείο της ελλειπτικής καμπύλης Ε που ορίζεται από την (1), τότε υπάρχει επίσης ένα (διαφορετικό) σημείο (χ_3,ψ_3) της Ε με $\chi_3>1$, έτσι ώστε $\chi_0=f(\chi_3)$. Αυτό όμως για το οποίο δεν είμαστε σίγουροι ότι ισχύει (και είναι είναι το ενδιαφέρων για την περίπτωσή μας) είναι το αν το σημείο (χ_3,ψ_3) είναι ρητό. Θα αποδείξουμε όμως ότι αν οι αριθμοί χ_0-1, χ_0, χ_0+1 είναι όλοι τους τετράγωνα ρητών, τότε υπάρχει ρητό σημείο (χ,ψ) της Ε ώστε $\chi_0=f(\chi)$.

Έστω λοιπόν $\chi_0-1=\upsilon^2,\ \chi_0=\nu^2,\ \chi_0+1=\mu^2,\ \upsilon,\nu,\mu\in\mathbb{Q}$ (13)

Θέτουμε $\chi=(\upsilon+\nu)(\nu+\mu)$ (14) Παρατηρούμε ότι $\upsilon^2+1=\nu^2=\mu^2-1$ (15)

Έχουμε $\chi^2-1=(\upsilon+\nu)^2(\nu+\mu)^2-1=[(\upsilon+\nu)(\nu+\mu)-1][(\upsilon+\nu)(\nu+\mu)+1]$ =
$(\upsilon\nu+\upsilon\mu+\nu^2+\nu\mu-1)(\upsilon\nu+\upsilon\mu+\nu^2+\nu\mu+1)=(\upsilon\nu+\upsilon\mu+\upsilon^2+\nu\mu)(\upsilon\nu+\upsilon\mu+\mu^2+\nu\mu)$ =
$(\upsilon+\nu)(\upsilon+\mu)(\mu+\nu)(\upsilon+\mu)$. Έτσι θα είναι $\chi^3-\chi=(\upsilon+\nu)^2(\upsilon+\mu)^2(\mu+\nu)^2$ (16)

Επίσης

$(\chi^2+1)^2=$ $[(\upsilon+\nu)^2(\nu+\mu)^2+1]^2=[(\upsilon+\nu)^2(\nu+\mu)^2+(\nu-\upsilon)(\nu+\upsilon)]^2=(\nu+\upsilon)^2[(\nu+\upsilon)(\nu+\mu)^2+\nu-\upsilon]$ =
$(\nu+\upsilon)^2[(\nu+\upsilon)(\nu+\mu)^2+(\nu-\upsilon)(\mu-\nu)(\mu+\nu)]=(\nu+\upsilon)^2(\nu+\mu)^2[(\nu+\upsilon)(\nu+\mu)+(\nu-\upsilon)(\mu-\nu)]$ =
$(\nu+\upsilon)^2(\nu+\mu)^2[\nu^2+\nu\mu+\upsilon\nu+\upsilon\mu+\nu\mu-\nu^2-\upsilon\mu+\upsilon\nu]^2=(\nu+\upsilon)^2(\nu+\mu)^2[\nu^2+\nu\mu+\upsilon\nu+\upsilon\mu+\nu\mu-\nu^2-\upsilon\mu+\upsilon\nu]^2$
$(\nu+\upsilon)^2(\nu+\mu)^2[2\nu\mu+2\upsilon\nu]^2=(\nu+\upsilon)^2(\nu+\mu)^2 4\nu^2(\mu+\upsilon)^2$ (17)

Με βάση τις (16) και (17) βρίσκουμε $f(x)=\frac{(x^2+1)^2}{4(x^3-x)}=\nu^2=\chi_0$ (18)

Θέτουμε τώρα $\chi=\frac{r}{s}$ ως ένα κλάσμα ελαχίστων όρων. Τότε $\chi_0=\frac{(r^2+s^2)^2}{4rs(r^2-s^2)}$ (19)

Επειδή (r,s)=1, αν για έναν πρώτο p ισχύει p/r^2+s^2 και $p/4rs(r^2-s^2)$ τότε αναγκαστικά p=2. Έτσι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των όρων του κλάσματος που εκφράζει τον χ_0 θα είναι μια δύναμη του 2. Θα δείξουμε ότι αυτή η δύναμη δεν μπορεί να ξεπερνάει το2.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $8/(r^2+s^2)^2$ τότε $4/(r^2+s^2)^2$ άρα $2/(r^2+s^2)$. Αυτό σημαίνει ότι αφού (r,s)=1 και οι δυο αριθμοί r,s, θα είναι περιττοί. Έτσι $r^2\equiv1mod4$, $s^2\equiv1mod4$ άρα $r^2+s^2\equiv2mod4$ και επομένως θα είναι $r^2+s^2=2+4k$ για κάποιον ακέραιο k. Άρα $(r^2+s^2)^2=4+8k+16k^2$. Η τελευταία σχέση δείχνει ότι 8/4 το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς $((r^2+s^2)^2,4rs(r^2-s^2))\leq4$.

Παρατηρούμε τώρα ότι $H(\chi_0)\geq\frac{(r^2+s^2)^2}{4}\geq\frac{1}{4}max(|r|,|s|)^4>max(|r|,|s|)=H(\chi)$ (20)

Η (20) αντιφάσκει στην αρχική επιλογή του χ_0, αφού αυτό το είχαμε επιλέξει να έχει το μικρότερο δυνατό ύψος. Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη του γεγονότος ότι **η ελλειπτική εξίσωση $\psi^2=\chi^3-\chi$ δεν έχει άλλες ρητές λύσεις εκτός των (0,0), (1,0) και (-1,0).**

Παράρτημα

Οι αλγεβρικοί συμβολισμοί του Διόφαντου

Ο T. Heath διακρίνει τρεις βασικές περιόδους στην εξέλιξη των μαθηματικών συμβόλων. Την ρητορική άλγεβρα, την συγκεκομμένη και την συμβολική. Ο Διόφαντος εγκαινιάζει την δεύτερη περίοδο. Κάνει χρήση κάποιων συμβόλων σε συνδυασμό με την ρητορική περιγραφή. Εισάγει ειδικό σύμβολο για την άγνωστη ζητούμενη ποσότητα παρόμοιο με το γράμμα στίγμα **ς** του αρχαιοελληνικού αλφαβήτου. Ακόμη κι όταν το πρόβλημα έχει περισσότερους από έναν άγνωστο, προσπαθεί να τους εκφράσει όλους με χρήση μόνο του συμβόλου ς. Για την έκφραση συγκεκριμένων αριθμητικών ποσοτήτων κάνει χρήση του αρχαίου ελληνικού συστήματος αρίθμησης. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται κάποιες συντομογραφίες:

Σύμβολο	**Ονομασία - Ερμηνεία**
$\mathring{M}$	Μονάδα χ^0
ς	Άγνωστος αριθμός χ
Δ^{Y}	Δύναμις χ^2
K^{Y}	Κύβος χ^3
$\Delta^{Y}\Delta$	Δυναμοδύναμις χ^4
ΔK^{Y}	Δυναμόκυβος χ^5
$K^{Y}K$	Κυβόκυβος χ^6
$\Delta^{Y\ \chi}\varepsilon$	$\frac{5}{\chi^2}$
Μις εν μορίω $\Delta^{Y}\Delta M\varepsilon\Delta^{Y}\iota\beta$	$\frac{16}{\chi^4+5+12\chi^2}$
$\frac{\kappa\varepsilon}{\rho\mu\delta}$	$\frac{144}{25}$

Για τη γραφή των πολυωνύμων ο Διόφαντος εφάρμοζε τους εξής κανόνες:

1. Οι συντελεστές αποδίδονταν με τα ελληνικά αριθμητικά σύμβολα γραμμένα ύστερα από τον άγνωστο.
2. Όλοι οι αφαιρούμενοι όροι γράφονταν μαζί ύστερα από το σύμβολο ⋔
3. Οι όροι που προστίθενταν μπαίνανε ο ένας πλάι στον άλλο δίχως προσθετικό σύμβολο ανάμεσά τους. Το ίδιο γινόταν και με τους όρους που αφαιρούνταν.

Κατάλογος των βασικών συμβόλων

Σύμβολο	Ερμηνεία	Πρόβλημα
$\Delta^{Y}\overline{\alpha},$	χ^2	ΙΙ-8
$\overset{\circ}{M}\overline{\iota\varsigma}\pitchfork\Delta^{Y}\overline{\alpha}$	16-χ^2	ΙΙ-8
$\Delta^{Y}\delta\overset{\circ}{M}\overline{\iota\varsigma}\pitchfork\varsigma\,\overline{\iota\varsigma}$	4χ^2+16-16χ	ΙΙ-8
$\overline{\iota\varsigma}$ πέμπτων	16/5.	ΙΙ-8
$\frac{\kappa\varepsilon}{\rho\mu\delta},$	144/25	ΙΙ-8
$\square^{ov}$	Τετράγωνον	ΙΙ-8
$\pi\lambda.\ \frac{\varepsilon}{\iota\varsigma},$	Πλευρά 16/5	ΙΙ-8
$\varsigma\,\overline{\beta}\pitchfork\overset{\circ}{M}\overline{\delta}.$	2x-4	ΙΙ-8
ἴσ. $\square$	Ισούται με τετράγωνο	ΙΙ-11

Κατάλογος των βασικών συμβόλων

Σύμβολο	Ερμηνεία	Πρόβλημα
$\dot{M}$ος δ×.	1/4.	II-11
L'	1/2.	II-11
$\frac{\xi\delta}{\sigma\varkappa\varepsilon}$·	225/64	II-11
$\frac{\xi\delta}{ϟ\zeta.}$	97/64	II-11
$\dot{M}\overline{\beta}$	Μονάδες 2	II-11
□ον	Τετράγωνον	II-11
$\Delta^{Y}\ \overline{\alpha}\ \dot{M}\ \overline{\alpha}$·	X^2+1	II-11
$\frac{\xi\delta}{\sigma\pi\theta}$·	289/64	II-11
$K^{Y}\ \overline{\iota\theta}$,	$19x^3$	Δ-11
□ου	Τετραγώνου	Δ-11

Κατάλογος των βασικών συμβόλων

Σύμβολο	Ερμηνεία	Πρόβλημα
$\varsigma\,\bar{\alpha}\,\dot{M}\,\bar{\alpha},$	Χ+1	Δ-11
$\Delta^{Y}\,\bar{\gamma}\,\varsigma\,\bar{\gamma}\,\dot{M}\,\bar{\alpha}$	$3\chi^2+3\chi+1$	Δ-11
$\dot{M}\,\bar{\alpha} \pitchfork \varsigma\,\bar{\beta}\cdot$	1-2χ	Δ-11
$K^{Y}\,\overline{\varrho\xi\theta}.$	$169\chi^3$	Δ-11
$\pi^{\lambda}.$	πλευρές	Δ-11
$\dot{M}\,\bar{\varsigma} \pitchfork \varsigma\,\bar{\alpha}.$	6-χ	Δ-24
$\varsigma\,\bar{\varsigma} \pitchfork \Delta^{Y}\,\bar{\alpha}\cdot$	$6\chi-\chi^2$	Δ-24
$K^{Y}\,\bar{\eta}\,\varsigma\,\bar{\delta} \pitchfork \Delta^{Y}\,\overline{\iota\beta}$	$8\chi^3+4\chi-12\chi^2$	Δ-24
$\varsigma\,\bar{\varsigma} \pitchfork \Delta^{Y}\,\bar{\alpha}.$	$6\chi-\chi^2$	Δ-24
$K^{Y}\,\overline{\varkappa\zeta}$	$27\chi^3$	Δ-24

Κατάλογος των βασικών συμβόλων

Σύμβολο	Ερμηνεία	Πρόβλημα
ς $\overline{ς}$ ⋔ $Δ^{Υ}$ $\overline{κζ}$	6χ-27χ²	Δ-24
ς $\frac{κζ}{\overline{κς}}$.	Χ=26/27	Δ-24
$\overline{ρλς}$.	136	Δ-24
Μ̊ κυβικῶν ⋔ ς $\overline{α}$,	Κύβος-χ	ΣΤ-18
$\overline{κα}$ δων.	21/4.	ΣΤ-18
ς $\overline{α}$ L′ Μ̊ $\overline{α}$.	3/2 x+1	ΣΤ-18
$\frac{ξδ}{,δϡιγ}$.	4913/64	ΣΤ-18
Μ̊ $\frac{ξδ}{,δϡιγ}$ ⋔ ς $\overline{α}$	Μονάδες (4913/64)-χ	ΣΤ-18
$Δ^{Υ}$ $\overline{ς}$ Μ̊ $\overline{ε}$ ἴσ. □φ	6x²+5	ΣΤ-3
$Δ^{Υ}$ $\overline{α}$ ⟨ ⋔ $Δ^{Υ×}$ $\overline{α}$ ⟩	Χ² -1/x²	ΣΤ-3

Κατάλογος των βασικών συμβόλων

Σύμβολο	Ερμηνεία	Πρόβλημα
$ς^{\times}\,\overline{\iota}.$	10/x	ΣΤ-3
$\Delta^{Y\times}\ \overline{\rho\alpha}\ \mathring{M}\,\overline{\kappa}$	101/x²+20	ΣΤ-3
εκις.	πεντάκις	ΣΤ-3
$\Delta^{Y\times}\ \overline{\varphi\varepsilon}\ \mathring{M}\,\overline{\rho}$	505/χ²+100	ΣΤ-3
$\Delta^{Y}\ \overline{\rho}\ \mathring{M}\,\overline{\varphi\varepsilon}$	100χ²+505	ΣΤ-3
$ς\ \varepsilon\omega\nu\ \overline{\kappa\delta}.$	Χ=24/5	ΣΤ-3
$\dfrac{\xi}{\upsilon\iota\gamma}$	413/60	ΣΤ-3
$\Delta^{Y}\ \dfrac{\gamma\chi}{\overline{\iota\zeta}\,.\,\varphi\xi\theta,}$	(170569/3600) χ²	ΣΤ-3

Βιβλιογραφία – Πηγές

1. Αρχαία ελληνική γραμματεία “Οι Έλληνες” - Διόφαντος – Εκδόσεις Κάκτος
2. Διοφάντου Αριθμητικά – Ευάγγελος Σταμάτης
3. Number Theory 1 – Fermat's Dream – Kazuya Kato, Nobushige Kurokawa, Takeshi Saito – American Mathematical Sosiety
4. Diophanti Alexandrini Rerum arithmeticarum libri sex – Δωρεάν Ebook - https://books.google.gr/books/about/Diophanti_Alexandrini_Rerum_arithmeticar.html?id=WyzWlCX-pqUC&redir_esc=y
5. Diophantus of Alexandria; a study in the history of Greek algebra (1910) – Sir Thomas Heath https://archive.org/stream/diophantusofalex00heatiala#page/n5/mode/2up
6. http://www.wilbourhall.org/pdfs/diophantus_vol_I.pdf
7. http://www.wilbourhall.org/pdfs/diophantus_vol_II.pdf
8. An Introduction to the theory of numbers – Ivan Niven, Herbert Zuckerman, Hugh Montgomery – John Wiley & Sons, Inc.
9. Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών – Lucas Bunt, Phillip Jones, Jack Bedient
10. Εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού στα Αριθμητικά του Διόφαντου – Γιάννης Θωμαΐδης – Εκδόσεις Ζήτη.
11. Εισαγωγή στη Γεωμετρία των Αλγεβρικών Καμπυλών – Δημήτριος Πουλάκης – Εκδόσεις Ζήτη