ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Έστω L, η γλώσσα της αριθμητικής και N η στάνταρτ ερμηνεία της. Για μια πρόταση της L αντί να λέμε 'αληθής' στην στάνταρτ ερμηνεία θα λέμε για συντομία ότι η πρόταση είναι ορθή.

θα λέμε ότι ο τύπος F(χ) της γλώσσας της αριθμητικής, **αριθμητικώς ορίζει** το σύνολο S φυσικών αριθμών, αν και μόνο αν για όλους τους φυσικούς αριθμούς α, έχουμε **α** $\in$ S **<=> F(α) ορθή.**

θα λέμε ότι το S είναι αριθμητικώς ορίσιμο ή απλά **αριθμητικό** όταν κάποιος τύπος της L αριθμητικώς ορίζει το σύνολο.

Η έννοια αυτή φυσιολογικά επεκτείνεται και για πολύ-θέσιες σχέσεις. Ένας τύπος F(χ,ψ) αριθμητικώς ορίζει την σχέση R πάνω στους φυσικούς αριθμούς, αν και μόνο αν για όλους τους φυσικούς αριθμούς α ,β έχουμε Rαβ $\Leftrightarrow$ F(α,β) ορθή.

Η έννοια επίσης επεκτείνεται και σε συναρτήσεις. Μια **συνάρτηση** λέγεται **αριθμητική** αν και μόνο αν η σχέση που ορίζει το γράφημα της είναι αριθμητικό. Έτσι μια μονοθέσια συνάρτηση f είναι αριθμητική αν και μόνο αν υπάρχει τύπος F(χ,ψ) της γλώσσας της αριθμητικής έτσι ώστε για όλους τους φυσικούς α,β έχουμε f(α)=β αν και μόνο αν F(α,β) ορθή.

Ισχύει το εξής βασικό.

<u>Λήμμα 1</u>

A) **Κάθε αναδρομική συνάρτηση είναι αριθμητική.**

B) Κάθε αναδρομικό σύνολο είναι αριθμητικό.

Λέγοντας **στοιχειώδη τύπο** της γλώσσας της αριθμητικής, εννοούμε έναν τύπο που κατασκευάζεται από ατομικούς τύπους με χρήση μόνο άρνησης, σύζευξης, διάζευξης και φραγμένης ποσόδειξης $\forall$χ<τ και $\exists$ χ<τ , όπου τ είναι όρος της γλώσσας. (Συνεπαγωγή και ισοδυναμίες επίσης επιτρέπονται αφού αυτές θεωρούνται συντομογραφίες τύπων με τους παραπάνω περιορισμούς). Επίσης φραγμένοι ποσοδείκτες $\forall$χ$\leq$τ και $\exists$ χ$\leq$τ μπορούν να χρησιμοποιηθούν αφού αυτοί είναι ισοδύναμοι με τις εκφράσεις $\forall$χ<τ' και $\exists$ χ<τ'.

Λέγοντας $\exists$ - **στοιχειώδης** τύπος εννοούμε έναν τύπο της μορφής $\exists$χ F (χ) όπου F είναι στοιχειώδης τύπος. Όμοια ορίζονται και οι $\forall$-στοιχειώδεις τύποι.

Γενικευμένοι $\exists$ - στοιχειώδεις τύποι περιλαμβάνουν όλους τους τύπους που αποκτούμε από τους στοιχειώδεις με εφαρμογή συζεύξεων, διαζεύξεων, φραγμένων υπαρκτικών και καθολικών ποσοδεικτών , και μη φραγμένων υπαρκτικών ποσοδεικτών.

ΛΗΜΜΑ 2

Κάθε αναδρομική συνάρτηση είναι αριθμητικώς ορίσιμη από έναν γενικευμένο $\exists$ -στοιχειώδη τύπο.

Πρόταση 1

Κάθε γενικευμένος $\exists$- στοιχειώδης τύπος είναι αριθμητικώς ισοδύναμος με έναν $\exists$ -στοιχειώδη τύπο. ,

(Δυο τύποι Φ(χ,ψ) και Ψ(χ,ψ) λέμε ότι είναι αριθμητικώς ισοδύναμοι αν για όλους τους αριθμούς α ,β **Φ(α,β)** είναι ορθός αν και μόνο αν Ψ(α,β) είναι ορθός. Όπου **α,β** είναι τα νούμερα των αριθμών α, β . Ισοδύναμα αυτό σημαίνει ότι η ισοδυναμία $\forall\chi\forall\psi(\Phi(\chi,\psi)\Leftrightarrow \Psi(\chi,\psi)$ είναι ορθή.)

Αν Τ είναι μια συνεπής θεωρία στην γλώσσα της αριθμητικής, θα λέμε ότι το σύνολο Σ είναι **ορισμένο** στην Τ από τον τύπο Δ(χ), αν για όλα τα ν, αν $\nu\in\Sigma$, τότε Δ(**ν**) είναι θεώρημα του Τ, ενώ αν $\nu\notin\Sigma$ τότε $\neg\Delta(\nu)$ είναι θεώρημα του Τ.

Το σύνολο Σ καλείται **ορίσιμο** στην Τ, αν Σ είναι ορισμένο από κάποιον τύπο.

Αν φ είναι μια μονοθέσια συνάρτηση, θα λέμε ότι η φ είναι **αναπαραστάσιμη** στην Τ αν υπάρχει τύπος Φ(χ,ψ) τέτοιος ώστε, όποτε φ(α)=β η παρακάτω πρόταση να είναι θεώρημα του Τ:

$\forall\psi(\Phi(\alpha,\psi)\leftrightarrow\psi = \beta)$.

Αυτό είναι λογικά ισοδύναμο με σύζευξη της θετικής δήλωσης Φ(α,β) και της γενικής αρνητικής δήλωσης $\forall\psi(\psi\neq\beta\rightarrow\neg\Phi(\alpha,\psi))$.

Σε αντιδιαστολή, η ορισιμότητα της φ, απαιτεί να έχουμε την θετική δήλωση και για κάθε ειδικό $\gamma\neq\beta$ να είναι $\neg\Phi(\alpha,\gamma)$.

Τώρα στην ειδική περίπτωση όπου Τ είναι η θεωρία της αληθούς αριθμητικής (δηλαδή η θεωρία που έχει ως αξιώματα όλες τις αληθείς στην στάνταρτ ερμηνεία προτάσεις της αριθμητικής), φυσικά αν κάθε ειδικό παράδειγμα είναι ορθό , τότε η καθολική γενίκευση είναι επίσης ορθή κι έτσι αναπαραστασιμότητα και ορισιμότητα δεν έχουν διαφορά. Για άλλες θεωρίες όμως κάθε ειδικό παράδειγμα πρότασης μπορεί να είναι θεώρημα, δίχως η καθολική γενίκευση να είναι επίσης θεώρημα και η αναπαραστασιμότητα είναι γενικά ισχυρότερη απαίτηση από την ορισιμότητα.

Ας σημειωθεί ότι αν αν Τ είναι ασθενέστερη θεωρία από την Τ* (το οποίο σημαίνει ότι το σύνολο των θεωρημάτων της Τ είναι υποσύνολο του συνόλου των θεωρημάτων της Τ*), τότε η απαίτηση ότι η συνάρτηση είναι αναπαραστάσιμη στην Τ είναι ισχυρότερη απαίτηση από το να είναι αναπαραστάσιμη στην Τ* (δηλαδή, η αναπαραστασιμότητα στην Τ συνεπάγεται την αναπαραστασιμότητα στην Τ*).
Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω **όλες οι αναδρομικές συναρτήσεις είναι αναπαραστάσιμες στην αληθή αριθμητική.**
Αν θέλουμε να ενισχύσουμε αυτό το αποτέλεσμα πρέπει να θεωρήσουμε ασθενέστερες θεωρίες από την αληθή αριθμητική. ,

Η ΜΙΝΙΜΑΛ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Η μίνιμαλ αριθμητική Q ορίζεται από το παρακάτω (πεπερασμένο) σύνολο αξιωμάτων. (ακολουθούμε την συνηθισμένη σύμβαση κατά την οποία όταν έχουμε προτάσεις στην γλώσσα της αριθμητικής που αρχίζουν με έναν η περισσότερους καθολικούς ποσοδείκτες, παραλείπονται οι ποσοδείκτες και γράφουμε μόνο τους ανοικτούς τύπους οι οποίοι τους ακολουθούν).

Q1 $0 \neq x'$
Q2 $\chi' = \psi' \rightarrow \chi = \psi$
Q3 $\chi + 0 = \chi$
Q4 $\chi + \psi' = (\chi + \psi)'$
Q5 $\chi \cdot 0 = 0$
Q6 $\chi\psi' = \chi\psi + \chi$
Q7 $\neg \chi < 0$
Q8 $\chi < \psi' \leftrightarrow (\chi < \psi) \vee \chi = \psi$
Q9 $\chi < \psi \vee \chi = \psi \vee \psi < \chi$

Η θεωρία της μίνιμαλ αριθμητικής είναι το σύνολο όλων των προτάσεων της γλώσσας της αριθμητικής οι οποίες είναι αποδείξιμες από τα παραπάνω αξιώματα.

<u>Θεώρημα 1</u>
Μια $\exists$ -στοιχειώδης πρόταση είναι ορθή αν και μόνο αν αυτή είναι θεώρημα της Q.

Μια **συνάρτηση** καλείται **στοιχειώδης,** αν αυτή είναι αριθμητικώς ορίσιμη από έναν στοιχειώδη τύπο.

Λήμμα 3

Κάθε στοιχειώδης συνάρτηση είναι αναπαραστάσιμη στην Q (και μάλιστα από έναν στοιχειώδη τύπο).

Θεώρημα 2

Α) **Κάθε αναδρομική συνάρτηση είναι αναπαραστάσιμη στην Q από έναν ∃ -στοιχειώδη τύπο.**

Β) Κάθε αναδρομική σχέση είναι ορίσιμη στην Q από έναν ∃-στοιχειώδη τύπο.

Διαγωνιοποίηση ενός τύπου Α, είναι η έκφραση 3χ(χ=#Α & Α) όπου #Α είναι ο αριθμός Γκέντελ του τύπου Α. Ενώ η έννοια αυτή νόημα για κάθε έκφραση, ωστόσο ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει στην περίπτωση που η έκφραση Α είναι τύπος μιας ελεύθερης μεταβλητής Α(χ). Αφού γενικά η έκφραση Φ(τ) είναι ισοδύναμη με την ∃χ(χ=τ & Φ(χ)), η περίπτωση που ο Α είναι μιας ελεύθερης μεταβλητής τύπος, η διαγωνιοποίηση του Α είναι η πρόταση Α(#Α).

Λήμμα 4 της διαγωνιοποίησης

Έστω Τ είναι μια θεωρία που περιέχει την Q. Τότε για κάθε τύπο Β(ψ) υπάρχει μια πρόταση Ο έτσι ώστε $\vdash_T$ G ↔ Β(#G).

Λήμμα 5

Έστω Τ συνεπής θεωρία που επεκτείνει την Ο. Τότε το σύνολο των αρθμών Γκέντελ των θεωρημάτων της Τ είναι μη ορίσιμο στην Τ.

Απόδειξη:

Έστω Τ μια επέκταση της Q. Ας υποθέσουμε ότι ο τύπος θ(ψ) ορίζει το σύνολο Θ των αριθμών Γκέντελ των θεωρημάτων της Τ. Από το λήμμα της διαγωνιοποίησης υπάρχει πρόταση G έτσι ώστε να ισχύει:

$\vdash_T$ G ↔~θ(#G). Με άλλα λόγια αν g είναι ο αριθμός Γκέντελ του G και **g** το αντίστοιχο νούμερο (δηλαδή το 0 ακολουθούμενο από g ΄) Τότε θα έχουμε $\vdash_T$G↔ ~θ(**g**). Ο G είναι θεώρημα του Τ γιατί διαφορετικά αν δεν ήταν θεώρημα του Τ ,το g δεν θα ανήκε στο Θ και αφού ο θ(ψ) ορίζει το Θ θα έχουμε $\vdash_T$ ~θ(**g**). Τότε όμως $\vdash_T$ G άτοπο.

Αφού λοιπόν G είναι θεώρημα θα έχουμε ότι ο g ανήκει στο Θ και έτσι $\vdash_T$ θ(**g**) . Τότε εφόσον $\vdash_T$ **G ↔ ~θ(g)** προκύπτει ότι $\vdash_T$ ~θ(**g**) πράγμα που σημαίνει ότι η T είναι ασυνεπής ,άτοπο.

<u>θεώρημα 3 (Tarski)</u>

Το σύνολο των αριθμών Γκέντελ των προτάσεων της αριθμητικής οι οποίες είναι ορθές (αληθείς στην στάνταρτ ερμηνεία) είναι μη αριθμητικώς ορίσιμο.

Απόδειξη

Το σύνολο T των ορθών προτάσεων της αριθμητικής συγκροτεί μια συνεπή επέκταση της Q) και η αριθμητική ορισιμότητα είναι απλώς η ορισιμότητα στην θεωρία αυτή, κι έτσι το θεώρημα προκύπτει από το παραπάνω λήμμα.

<u>Θεώρημα 4(Μη απαντησιμότητα της αριθμητικής)</u>

Το σύνολο των αριθμών Γκέντελ των προτάσεων της γλώσσας της αριθμητικής οι οποίες είναι ορθές, δηλαδή αληθείς στην στάνταρτ ερμηνεία, είναι μη αναδρομικό.

Απόδειξη

Αυτό προκύπτει από το λήμμα 5 και το γεγονός ότι όλα τα αναδρομικά σύνολα είναι ορίσιμα στην αριθμητική.

Υποθέτοντας ότι η θέση του Church's ισχύει το παραπάνω σημαίνει ότι το σύνολο των αληθών προτάσεων της αριθμητικής είναι μη αποτελεσματικά απαντήσιμο. Δηλαδή δεν υπάρχουν κανόνες - που απαιτούν μόνο επιμέλεια και επιμονή ,όχι ευφυΐα και διόραση στην εκτέλεση -που όταν εφαρμόζονται σε μια πρόταση της γλώσσας της αριθμητικής , να μπορούν τελεσίδικα να πουν αν η πρόταση είναι ή δεν είναι ορθή.

<u>Θεώρημα 5 (ουσιώδους μη απαντησιμότητας)</u>

Καμιά συνεπής επέκταση της Q, δεν είναι αποφασίσιμη (decidable)
Ειδικότερα η ίδια η Q είναι μη αποφασίσιμη (undecidable).

Απόδειξη

Έστω T συνεπής επέκταση της Q (ειδικότερα T θα μπορούσε να είναι η ίδια η Q). Από το λήμμα 5 το σύνολο Θ των αριθμών Γκέντελ των θεωρημάτων της T είναι μη ορίσιμο στην T. Τώρα όπως στην περίπτωση του θεωρήματος 4 επικαλεσθείτε το γεγονός ότι κάθε αναδρομικό σύνολο είναι ορίσιμο στην T.

Έτσι το σύνολο Θ είναι μη αναδρομικό, το οποίο μας λέει ότι είναι μη απαντήσιμο.

<u>Θεώρημα 6 (Church's theorem)</u>

Το σύνολο των λογικά έγκυρων προτάσεων είναι μη απαντήσιμο.

Απόδειξη

Έστω Γ είναι η σύζευξη όλων των αξιωμάτων της Q. Τότε μια πρόταση A είναι θεώρημα της Q αν και μόνο αν A είναι μια συνέπεια (consequence) του Γ, κι έτσι αν και μόνο αν (~Γ ν A) είναι λογικά έγκυρη. Η συνάρτηση φ που αντιστοιχεί στον, αριθμό Γκέντελ της A, τον αριθμό Γκέντελ της (~Γ ν A) είναι αναδρομική. Αν το σύνολο Λ των λογικά έγκυρων προτάσεων ήταν αναδρομικό τότε και το σύνολο K των αριθμών Γκέντελ των θεωρημάτων της Q, που αποκτάται από το Λ με αντικατάσταση της αναδρομικής συνάρτησης φ, θα ήταν αναδρομικό. (αφού α ανήκει στο K αν και μόνο αν φ(α) ανήκει στο Λ). Αυτό όμως αντιφάσκει με το θεώρημα 4.

Το σύνολο των έγκυρων προτάσεων, και των θεωρημάτων μιας αξιωματικοποιήσιμης θεωρίας (δηλαδή μιας θεωρίας όπου διαθέτει ένα σύνολο αξιωμάτων το οποίο είναι αναδρομικό), είναι ημιαναδρομικό και διαισθητικά και τα δυο είναι *θετικώς* αποτελεσματικά απαντήσιμα: σε γενικές γραμμές , αν όχι στην πράξη, αναζητώντας ανάμεσα σε όλες τις επεξηγήσεις (ή όλες τις αποδείξεις από τα αξιώματα της θεωρίας), αν μια πρόταση είναι έγκυρη (ή θεώρημα της θεωρίας), κάποιος μπορεί τελικά να τις εντοπίσει. Τα θεωρήματα 5 και 6 παραπάνω μας λένε ότι αυτά τα σύνολα δεν είναι αναδρομικά, κι έτσι σύμφωνα με την θέση του Church's δεν μπορεί να είναι αποτελεσματικά απαντήσιμα.

<u>Θεώρημα 7 (Πρώτο θεώρημα μη πληρότητας του</u>

Δεν υπάρχει συνεπής και πλήρης αξιωματικοποιήσιμη επέκταση της

Απόδειξη

Κάθε πλήρης αξιωματικοποιήσιμη θεωρία είναι αποφασίσιμη , αλλά όπως δείξαμε παραπάνω δεν υπάρχει συνεπής και αποφασίσιμη επέκταση της Q.