

## ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑΣ ΕΟΡΤΑΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΑΣΧΑ ΤΩΝ ΟΡΘΟΔΟΞΩΝ

Γιώργος Κασσιπιδης  
Μαθηματικός

### Ο ΣΥΝΟΔΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΟΡΤΑΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΑΣΧΑ

Ο καθορισμός της ημερομηνίας του Πάσχα, ήταν ένα μεγάλο πρόβλημα για τις πρωτο-χριστιανικές Εκκλησίες. Επειδή οι Εβραίοι γιόρταζαν το δικό τους Νομικό Πάσχα κατά την ημέρα της πανσελήνου, που συνέβαινε μετά την εαρινή ισημερία, και επειδή ο Χριστός αναστήθηκε μετά το εβραϊκό Πάσχα, η Α΄ Οικουμενική Σύνοδος με τη συμμετοχή 318 Πατέρων, που συνήλθε το 325 μ.Χ. στη Νίκαια της Βιθυνίας, εκτός από τις άλλες σημαντικές αποφάσεις της, θεώρησε αναγκαίο να οριοθετήσει τη μεγάλη αυτή γιορτή της Χριστιανοσύνης, προκειμένου να σταματήσουν οι ασάφειες ως προς την ημερομηνία εορτασμού της.

Το 325 μ.Χ. η εαρινή ισημερία συνέβη στις 21 Μαρτίου και πάνω σ' αυτήν την σταθερή, όπως υπολόγισαν, ημερομηνία βασίστηκε ο παρακάτω συνοδικός κανόνας υπολογισμού της μεγάλης γιορτής: « **Το Πάσχα θα εορτάζεται την 1η Κυριακή, μετά την Σελήνη 14 ημερών η οποία συμπίπτει ή έπεται της εαρινής ισημερίας στις 21 Μαρτίου.**».

(Σήμερα, όλες οι παραπάνω ημερομηνίες για τους ορθόδοξους λαμβάνονται σύμφωνα με το παλαιό Ιουλιανό ημερολόγιο, ενώ για τους καθολικούς σύμφωνα με το νέο Γρηγοριανό ημερολόγιο.)

Συνεπώς, αν η Σελήνη 14 ημερών (εκκλησιαστική πανσέληνος, συνήθως και πραγματική πανσέληνος) συμβεί Κυριακή, το Πάσχα θα γιορτάζεται μια Κυριακή αργότερα, για να μη συμπίπτει το χριστιανικό με το εβραϊκό Πάσχα, που το γιορτάζουν οι Εβραίοι κατά την πανσέληνο του μήνα Νισάν, η οποία συμβαίνει συνήθως μετά την εαρινή ισημερία.

Αργότερα οι πατέρες της Εκκλησίας ανάθεσαν στον Πατριάρχη Κύριλλο Α΄ της Αλεξάνδρειας (376-444 μ.Χ.), περιοχής όπου άκμαζε τότε η αστρονομία, να καθορίσει το «Πασχάλιο» για όλες τις Χριστιανικές Εκκλησίες. Ο Κύριλλος Α΄ κατασκεύασε πίνακες του Πασχαλίου, με αφετηρία χρονολογήσεων την εποχή την εποχή του Διοκλητιανού, οι οποίοι πιθανώς έφθαναν μέχρι το 531 μ.Χ. Οι αστρονόμοι όμως της Αλεξάνδρειας υπολόγιζαν τις ημέρες της πανσελήνου από τον 19ετή κύκλο του Μέτωνος. Οι ημερομηνίες λοιπόν του Πάσχα καθορίστηκαν αρχικά (και καθορίζονται μέχρι σήμερα από την Ορθόδοξη Εκκλησία) με βάση τον 19ετή αυτόν κύκλο.

### Ο ΚΥΚΛΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΩΝΑ

Ο Αθηναίος Αστρονόμος Μέτων (432π.Χ.) ανακάλυψε ότι 235 [συνοδικοί μήνες](#) ισοδυναμούν με 19 [τροπικά](#) (ηλιακά) έτη ή 6940 ημέρες.

( 125 μήνεςX30 μέρες+110 μήνες X 29 μέρες=6940 μέρες.)

Μέσα στον 19 ετή κύκλο όλα τα ουράνια φαινόμενα (πχ. Οι φάσεις της σελήνης) επαναλαμβάνονται με την ίδια σειρά.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι οι πανσέληνοι επαναλαμβάνονται περίπου 1,5 ώρες νωρίτερα απ'ότι πρίν από 19 έτη. Έτσι από το 325 μ.Χ. ο κύκλος του Μέτωνά έχει ένα αθροιστικό σφάλμα περίπου 5,5 ημερών.

### ΙΟΥΛΙΑΝΟ Η ΠΑΛΑΙΟ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ

Το 46 πΧ ο Ιούλιος Καίσαρας, έχοντας διαπιστώσει την ουσιαστική ημερολογιακή δυσαρμονία με τις αντίστοιχες κλιματολογικές εποχές του έτους, αποφάσισε να πραγματοποιήσει μια δραστική παρέμβαση στο ημερολόγιο του Νουμά.

Κάλεσε, λοιπόν, από την Αλεξάνδρεια, όπου τότε άκμαζε η Αστρονομία, τον Έλληνα αστρονόμο Σωσιγένη και αναμόρφωσε το ημερολόγιο του Νουμά σύμφωνα με τις υποδείξεις του. Το Ιουλιανό ημερολόγιο ήταν αποκλειστικά ηλιακό (όπως και το Αιγυπτιακό) και αγνοούσε εντελώς τις φάσεις της Σελήνης. Ο Σωσιγένης θεώρησε το τροπικό έτος ίσο με 365,25 ημέρες. Για να μπορέσει να μετρήσει αυτές τις 0,25 επιπλέον ημέρες πρόσθεσε κάθε τέσσερα χρόνια μια εμβόλιμη μέρα στην διάρκεια του έτους και η οποία την εποχή εκείνη τοποθετείτο μετά την 24<sup>η</sup> Φεβρουαρίου, που ονομαζόταν «dies sextus ante Calendas Martias» δηλαδή η 6<sup>η</sup> ημέρα πριν τις Καλένδες (πρωτομηνιά) του Μαρτίου.

Οι Ρωμαίοι όμως πίστευαν ότι ο Φεβρουάριος έπρεπε να έχει πάντα 28 ημέρες, γιατί μ' αυτόν τον τρόπο θα απέφυγαν την ασέβεια προς τους χθόνιους θεούς και την μνήμη των νεκρών. Έτσι δεν αριθμούσαν την εμβόλιμη αυτή ημέρα ως 5<sup>η</sup> πριν τις Καλένδες του Μαρτίου, αλλά από θεοσέβεια μετρούσαν δυο φορές την 24<sup>η</sup> Φεβρουαρίου ως δις-έκτη («dies sextus ante Calendas Martias»). Συνεχίζοντας αυτήν την παράδοση, ακόμη και σήμερα ονομάζουμε δίσεκτο (bisextilium, annus bisextus) το έτος που έχει μια πρόσθετη ημέρα, μόνο που εμείς την προσθέτουμε στο τέλος του Φεβρουαρίου, ως 29<sup>η</sup> ημέρα του. Μ' αυτόν τον τρόπο το πολιτικό έτος είχε πάντοτε ακέραιο αριθμό ημερών-είτε 365 στα κοινά έτη, είτε, κάθε τέσσερα χρόνια, 366 ημέρες στα δίσεκτα-και οι μήνες είχαν διάρκεια, εκτός βέβαια από τον Φεβρουάριο, 31 ή 30 ημέρες εναλλάξ.

Κατά τους χριστιανικούς χρόνους θεσπίστηκε να θεωρούνται ως δίσεκτα, στο Ιουλιανό ημερολόγιο, εκείνα τα έτη, των οποίων ο αριθμός διαιρείται ακριβώς δια 4.

Η εφαρμογή του Ιουλιανού ημερολογίου άρχισε την 1<sup>η</sup> Ιανουαρίου του 45 πΧ. και η εαρινή ισημερία συνέβη στις 23 Μαρτίου.

## ΓΡΗΓΟΡΙΑΝΟ Ή ΝΕΟ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ

Στο Ιουλιανό ημερολόγιο η διάρκεια του έτους υπολογίζεται σε 365,25 ημέρες. Όμως η πραγματική διάρκεια του τροπικού έτους είναι 365,24219879 ημέρες. Έτσι το Ιουλιανό έτος είναι κατά  $365,25 - 365,24219879 = 0,00780121$  ημέρες (11 min και 14 sec ή 674 sec) μεγαλύτερο από την πραγματική διάρκειά του. Η διαφορά αυτή, ενώ αρχικά ήταν ασήμαντη, με το πέρασμα των αιώνων αθροιστικά μεγάλωνε σημαντικά. Η ετήσια διαφορά των 0,00780121 ημερών σε 400 χρόνια ήταν  $0,00780121 \times 400 = 3,12048$  ημέρες ή περίπου 1 ημέρα κάθε 128 χρόνια. Δηλαδή η μέση τιμή του [πολιτικού](#) Ιουλιανού έτους 365,25 ημερών, μετακινούσε την αρχή του πολιτικού έτους πέρα από την φυσική αστρονομική της θέση κατά μια ημέρα σε χρονικό κύκλο 128 ετών. Μ' άλλα λόγια οι αστρονομικές εποχές του έτους μετατοπιζόνταν προς τα εμπρός (αντίθετα με το ημερολόγιο του Νουμά Πομπήλιου.) Έτσι ενώ το 45 πΧ η εαρινή ισημερία συνέβαινε στις 23 Μαρτίου, το 85 μΧ το ημερολόγιο την σημείωνε στις 22 Μαρτίου και το 213 μΧ. Στις 21 Μαρτίου, ημερομηνία που ίσχυε μέχρι το 341 μΧ. Συνεπώς όταν το 325 μ.Χ. συνήλθε η Α΄ οικουμενική σύνοδος στη Νίκαια της Βιθυνίας και όρισε πότε θα εορτάζεται το Πάσχα για όλες τις χριστιανικές εκκλησίες, η εαρινή ισημερία-σύμφωνα με το ημερολόγιο- συνέβαινε στις 21 Μαρτίου.

Τελικά ο πάπας Γρηγόριος ΙΓ΄ με προτροπή του Ιησούιτη μοναχού Κλάβιους και στηριγμένος στην εισήγηση του φημισμένου καθηγητή της ιατρικής και ονομαστού αστρονόμου Λουίτζι Λίλιο από την Καλαβρία, θεσπίσε την ημερολογιακή αλλαγή το σωτήριο έτος 1582 μ.Χ. Το έτος 1582 το Ιουλιανό ημερολόγιο έδειχνε την εαρινή ισημερία στις 11 Μαρτίου, δηλαδή 10 μέρες νωρίτερα σε σχέση με την αστρονομική-άρα και ορθή-εαρινή ισημερία του έτους 325 μ.Χ. Επειδή όμως από την ημερομηνία της αστρονομικής εαρινής ισημερίας κανονίζεται ο

εορτασμός του Πάσχα, το σφάλμα του Ιουλιανού ημερολογίου επιδρούσε στον υπολογισμό της ημερομηνίας της μεγάλης αυτής γιορτής της χριστιανοσύνης.

Επομένως, ήταν απαραίτητη η αλλαγή του Ιουλιανού ημερολογίου και το πολιτικό έτος έπρεπε να ελαττωθεί κατά 10 ημέρες που είχαν μετρηθεί, χωρίς να έχουν πραγματικά διανυθεί, αφού το πολιτικό έτος ήταν ελαφρά μεγαλύτερο του τροπικού. Αποφασίστηκε, λοιπόν, να μετατεθούν οι εποχές του έτους σε σχέση με το τροπικό έτος, ώστε να επανέλθουν στις ίδιες συνθήκες όπως το έτος 325 μ.Χ. που έγινε η Α΄ Οικουμενική Σύνοδος.

Επιπλέον η δυτική εκκλησία αντικατέστησε τον «χρυσό αριθμό» με την γρηγοριανή επακτή. Δηλαδή το ημερολογιακό σχέδιο του Λίλιου άλλαξε και διόρθωσε τις λεγόμενες επακτές του σεληνοδρομίου, με αποτέλεσμα να αλλάξει ο τρόπος υπολογισμού της γιορτής του Πάσχα.

Ο Κλάβιους, με βάση την εισήγηση του Λίλιου κατάφερε να συγχρονίσει το πολιτικό έτος με τις αστρονομικές εποχές του έτους. Πέτυχε επίσης να περιορίσει τα σφάλματα του Ιουλιανού ημερολογίου, ξαναφέροντας σε σύμπτωση την αστρονομική εαρινή ισημερία (21 Μαρτίου) με την ημερολογιακή, μέσω της αφαίρεσης των 10 επιπλέον ημερών από το ημερολόγιο.

Έτσι δημιουργήθηκε το Γρηγοριανό ή νέο ημερολόγιο και καθιερώθηκε με παπική εγκύκλιο το 1582 μ.Χ. (15 Οκτωβρίου). Για να περιοριστούν τα σφάλματα του Ιουλιανού ημερολογίου και για να μην επαναληφθεί το ίδιο λάθος, θεσπίστηκε κάθε περίοδος 4 αιώνων να περιλαμβάνει 97 δισεκτα έτη και όχι 100. Η ρύθμιση αυτή ήταν επιβεβλημένη εφ' όσον ανα 4 αιώνες η ετήσια διαφορά των 0,0078021 ημερών γινόταν ίση με  $0,0078021 \times 400 = 3,12048$  ημέρες. Τελικά ο Λίλιο εισήγαγε τον εξής κανόνα υπολογισμού των δισεκτων ετών: Από τα δισεκτα έτη του Ιουλιανού ημερολογίου που δείχνουν αιώνες (επαιώνια έτη), όπως το 1600, 1700, 1800, 1900, 2000, 2100 κ.ο.κ. δισεκτα θα θεωρούνται στο νέο ημερολόγιο εκείνα των οποίων ο αριθμός των αιώνων (16, 17, 18, 19, 20, 21 κ.ο.κ.) διαιρείται με το 4, ή ολόκληρος ο αριθμός διαιρείται ακριβώς με το 400.

Με τον τρόπο αυτόν η μέση διάρκεια του ημερολογιακού έτους από 365,25 ημέρες στο Ιουλιανό ημερολόγιο διορθώθηκε σε  $365 + 97/400 = 365,2425$  ημέρες. Το πολιτικό λοιπόν έτος διέφερε από το τροπικό κατά  $365,2425 - 365,24219879 = 0,00030121$  ημέρες. Δηλαδή το μέσο γρηγοριανό πολιτικό έτος είναι μεγαλύτερο από το τροπικό μόνο κατά 26 δευτερόλεπτα ετησίως. Αυτό εισάγει μια επιβράδυνση της αρχής του έτους κατά μια ημέρα κάθε 3320 έτη. ( $400:0,120484 = 3320$ )

### ΧΡΥΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Χρυσός αριθμός είναι ο αριθμός που δείχνει τη θέση του έτους μέσα στον 19-ετή κύκλο του Μέτωνα. Ως 19-ετή βάση για την εύρεση των φάσεων της Σελήνης οποιουδήποτε έτους θεωρήθηκαν οι ημερομηνίες των ετών 1-19 μ.Χ.

Οι χρονολόγοι της εποχής εκείνης, σκέφτηκαν ότι ο χρονικός αυτός κύκλος θα έπρεπε να αρχίζει ένα έτος του οποίου η πρώτη πανσέληνος θα ήταν η 1<sup>η</sup> Ιανουαρίου. Ανατρέχοντας στο παρελθόν, διαπίστωσαν ότι ένα τέτοιο έτος ήταν το αμέσως προηγούμενο από το έτος 1 μ.Χ. Συνεπώς στο πρώτο έτος του χριστιανικού συστήματος χρονολόγησης δόθηκε ο χρυσός αριθμός 2. Έτσι για να βρούμε τον χρυσό αριθμό του έτους E, διαρούμε το E με το 19 και στο υπόλοιπο προσθέτουμε τον αριθμό 1. (πχ  $\chi(1993) = \text{mod}(1993, 19) + 1 = 17 + 1 = 18$ ).

### ΕΠΑΚΤΗ (ΙΟΥΛΙΑΝΗ)

Επακτή ονομάζουμε την ηλικία της σελήνης την παραμονή της 1<sup>ης</sup> Ιανουαρίου (31 Δεκεμβρίου) ενός έτους. Προσέξτε ότι η ηλικία της σελήνης την 1<sup>η</sup> Ιανουαρίου είναι ίση με την ηλικία της στις 1<sup>η</sup> Μαρτίου αφού  $(31 + 28)/2 = 59/2 = 29,5$ .

## ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑΣ ΕΟΡΤΑΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΑΣΧΑ ΤΩΝ ΟΡΘΟΔΟΞΩΝ

Η επακτή καθορίζεται με βάση τους παρακάτω κανόνες: (υποθέτουμε την ορθότητα του κύκλου του Μέτωνα καθώς και την πλήρη εναρμόνιση του κύκλου με 19 Ιουλιανά έτη.)

A) Η διάρκεια του σεληνιακού έτους είναι 11 περίπου ημέρες (για την ακρίβεια 10,88) μικρότερο του τροπικού έτους. (πράγματι 12 σεληνιακοί μήνες  $\times$  29,5 ημερες=354 ημέρες, και 365-354=11 ημέρες)

B) Το υπο χρυσό αριθμό «1 έτος», έχει επακτή 8.

Έτσι αν  $\chi$  συμβολίζει το χρυσό αριθμό του έτους, θα έχουμε:

$$\varepsilon = [8 + 11(\chi - 1)]_{30} = [11\chi - 3]_{30}$$

όμως  $\chi = [E]_{19} + 1$  άρα τελικά θα είναι  $\varepsilon = [11[E]_{19} + 8]_{30}$

Οι δυνατές τιμές της (Ιουλιανής) επακτής δίνονται στον παρακάτω πίνακα

<b>Χρυσός αριθμ <math>\chi</math></b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
<b>Επακτή <math>\varepsilon</math></b>	8	19	0	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26

Να σημειωθεί ότι η Ιουλιανή επακτή δεν εκφράζει (σήμερα) την πραγματική ηλικία της σελήνης, αλλά μια υποθετική ηλικία, την ηλικία που θα είχε η σελήνη σύμφωνα με το Ιουλιανό ημερολόγιο αν ο κύκλος του Μέτωνα ήταν απολύτως σωστός. Η επακτή συνέπιπτε με την ηλικία της Σελήνης την παραμονή της 1<sup>ης</sup> Ιανουαρίου του έτους υπολογισμών, κατά τους πρώτους αιώνες της εφαρμογής του Ιουλιανού ημερολογίου, δηλαδή κατά την εποχή της προσαρμογής των πινάκων του Μέτωνος στις ημερομηνίες του Ιουλιανού ημερολογίου.

Για να υπολογίσουμε την πραγματική ηλικία της σελήνης κατά την 31<sup>η</sup> Δεκεμβρίου του Ιουλιανού ημερολογίου, πρέπει να αυξήσουμε την ιουλιανή επακτή κατά μια ποσότητα η οποία ονομάζεται «πρόπτωση» ή «εξίσωση της Σελήνης».

### ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑΣ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΗΣ ΠΑΝΣΕΛΗΝΟΥ

Έστω  $\varepsilon$  η επακτή του έτους  $E$ , τότε η ημερομηνία της νέας Σελήνης σε ημέρες Μαρτίου είναι 30- $\varepsilon$ , ενώ η ημερομηνία της εκκλησιαστικής πανσελήνου είναι 30- $\varepsilon$ +14=44- $\varepsilon$  σε ημέρες Μαρτίου Ιουλιανού ημερολογίου. Προσαρμόζοντας την ημερομηνία αυτή στο Γρηγοριανό ημερολόγιο έχουμε:

**Ημερομηνία εκκλησιαστικής πανσελήνου, σε ημέρες Μαρτίου=44- $\varepsilon$ +13**

(Ας σημειωθεί ότι από το 1900 έως 2100 η διαφορά των δυο ημερολογίων είναι 13 ημέρες.)

Αν  $\alpha = [E]_{19}$  παρατηρούμε ότι:

$\alpha$	$[11\alpha + 8]_{30}$	$[19\alpha + 16]_{30}$	$[11\alpha + 8]_{30} + [19\alpha + 16]_{30}$
0	8	16	24
1	19	5	24
2	0	24	24
3	11	13	24
4	22	2	24
5	3	21	24
6	14	10	24
7	25	29	54
8	6	18	24
9	17	7	24
10	28	26	54
11	9	15	24
12	20	4	24
13	1	23	24

ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑΣ ΕΟΡΤΑΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΑΣΧΑ ΤΩΝ ΟΡΘΟΔΟΞΩΝ

14	12	12	24
15	23	1	24
16	4	20	24
17	15	9	24
18	26	28	54

Παρατηρούμε ότι  $[19\alpha+16]_{30}+[11\alpha+8]_{30}=24$  αν  $\varepsilon<24$  ή  $54$  αν  $\varepsilon>23$

Θα είναι λοιπόν:

Ημερομηνία πασχαλινής εκκλησιαστικής πανσελήνου, σε ημέρες Μαρτίου= $44-\varepsilon+13=57-[11\alpha+8]_{30}$

Αν  $\varepsilon\leq 23$  (οπότε  $44-\varepsilon\geq 21$  και η πασχαλινή πανσέληνος είναι τον Μάρτιο) θα έχουμε Ημερομηνία πασχαλινής εκκλησιαστικής πανσελήνου, σε ημέρες Μαρτίου  $=57+[19\alpha+16]_{30}-24=33+[19\alpha+16]_{30}=2+[19\alpha+16]_{30}$  Απριλίου.

Αν  $\varepsilon>23$  (οπότε η πασχαλινή πανσέληνος είναι τον Απρίλιο, εφόσον  $44-\varepsilon<21$ ) θα έχουμε Ημερομηνία πασχαλινής εκκλησιαστικής πανσελήνου, σε ημέρες Μαρτίου= $44-\varepsilon+30$  Μαρτίου= $44-\varepsilon+30-31$  Απριλίου= $56-\varepsilon$  Απριλίου= $56+[19\alpha+16]_{30}-54=2+[19\alpha+16]_{30}$  Απριλίου Τελικά σε κάθε περίπτωση θα έχουμε:

**Ημερομηνία πασχαλινής εκκλησιαστικής πανσελήνου= $2+[19[E]_{19}+16]_{30}$  Απριλίου**

Για να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός εύρεσης της ημερομηνίας του Πάσχα των ορθοδόξων, πρέπει να βρούμε τι μέρα πέφτει η εκκλησιαστική Πασχαλινή Πανσέληνος που όπως είδαμε είναι  $2+[19[E]_{19}+16]_{30}$  Απριλίου.

Πρώτα θα λύσουμε το πρόβλημα της εύρεσης της ημέρας που πέφτει μια ορισμένη ημερομηνία.

**ΠΟΙΑ ΜΕΡΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ ΠΕΦΤΕΙ ΜΙΑ ΔΟΣΜΕΝΗ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ**

Αποδίδουμε έναν αριθμό  $H$  σε κάθε μέρα, αρχίζοντας από την πρώτη μέρα του 1<sup>ου</sup> έτους μ.Χ. Έτσι για την  $\mu^{\text{η}}$  μέρα του έτους  $v+1$  θα έχουμε:

$$H=365v+\left[\frac{v}{4}\right]-\left[\frac{v}{100}\right]+\left[\frac{v}{400}\right]+\mu$$

Όπου  $[x]$  συμβολίζει το ακέραιο μέρος του αριθμού  $x$ , ενώ η παράσταση  $\left[\frac{v}{4}\right]-\left[\frac{v}{100}\right]+\left[\frac{v}{400}\right]$

δηλώνει το πλήθος των προηγούμενων δίσεκτων ετών. ( Δίσεκτα κατά το Γρηγοριανό ημερολόγιο είναι τα έτη που η τάξη τους διαιρείται με το4. Εξαιρούνται εκείνα που η τάξη τους είναι διαιρετή με το 100 όχι όμως εκείνα που η τάξη τους διαιρείται με το 400.)

Θεωρούμε τώρα την αντιστοιχία

Κυριακή Δευτέρα Τρίτη Τετάρτη Πέμπτη Παρασκευή Σάββατο  
 0 1 2 3 4 5 6

και ορίζουμε  $\varphi(H)\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$  ανάλογα με το την μέρα της εβδομάδας κατά την παραπάνω αντιστοιχία. Τότε έχουμε:

$$\varphi(H)-\varphi(H-1)\equiv 1 \pmod{7}$$

$$\text{και γενικά } \varphi(H)-\varphi(H-k)\equiv k \pmod{7}$$

$$\text{έτσι } \varphi(H)-\varphi(H1)\equiv H-H1 \pmod{7}$$

Την 10-9-2003 ήταν ημέρα Τετάρτη. Επομένως θα έχουμε:

$$H1=365 \cdot 2002+\left[2002:4\right]-\left[2002:100\right]+\left[2002:400\right]+253$$

$$H1=730730+500-20+5+253=731468$$

Έτσι  $\varphi(H)-3\equiv H-3 \pmod{7}$  γιατί  $731468\equiv 3 \pmod{7}$ . Άρα  $\varphi(H)\equiv H \pmod{7}$  και συνεπώς

$$\varphi(H)\equiv\left(v+\left[\frac{v}{4}\right]-\left[\frac{v}{100}\right]+\left[\frac{v}{400}\right]+\mu\right) \pmod{7}$$

**Παράδειγμα:** Τι μέρα ήταν τα Χριστούγεννα του 2006;

Η ημερομηνία μας είναι 25/12/2006

Έχουμε:  $v=2005$

$$\mu=31+28+31+30+31+30+31+31+30+31+30+25=359$$

$$2005+\left[2005:4\right]-\left[2005:100\right]+\left[2005:400\right]=2005+501-20+5+359=2850$$

$$\varphi(H)=2850 \pmod{7}=1, \text{ άρα ήταν ημέρα Δευτέρα.}$$

Επιστρέφοντας τώρα στο αρχικό μας πρόβλημα, δηλαδή στην εύρεση της ημέρας που πέφτει η εκκλησιαστική Πανσέληνος του έτους  $E$ , έχουμε:

Αν το έτος  $E$  δεν είναι δίσεκτο σύμφωνα με τα παραπάνω η ζητούμενη μέρα θα είναι

$$\{E-1+\left[\frac{E-1}{4}\right]-\left[\frac{E-1}{100}\right]+\left[\frac{E-1}{400}\right]+31+28+31+\left[19[E]_{19}+16\right]_{30}+2\} \pmod{7} =$$

$$\{E + [\frac{E-1}{4}] - [\frac{E-1}{100}] + [\frac{E-1}{400}] + 9 + [19[E]_{19} + 16]_{30}\} \bmod 7 =$$

$$\{E + [\frac{E-1}{4}] - [\frac{E-1}{100}] + [\frac{E-1}{400}] + [19[E]_{19} + 16]_{30}\} \bmod 7$$

Επειδή η παράσταση  $[\frac{E-1}{4}] - [\frac{E-1}{100}] + [\frac{E-1}{400}] = \delta$ , μετράει το πλήθος των δίσεκτων ετών που προηγούνται του έτους E, και επειδή εδώ μας ενδιαφέρουν ημερομηνίες μετά την 29<sup>η</sup> Φεβρουαρίου, και εφόσον όταν το έτος E είναι δίσεκτο στον παραπάνω υπολογισμό θα πρέπει να προσθέσουμε +1, μπορούμε να ενοποιήσουμε τους υπολογισμούς μας σε έναν τύπο ανεξαρτήτως του αν το έτος E είναι δίσεκτο ή όχι ως εξής:

$$\text{Ημέρα πασχαλινής εκκλησιαστικής Πανσελήνου} = \eta = \{E + [\frac{E}{4}] - [\frac{E}{100}] + [\frac{E}{400}] + [19[E]_{19} + 16]_{30}\} \bmod 7$$

Η διαφορά 7-η εκφράζει το πλήθος των ημερών μέχρι την επόμενη Κυριακή από την ημερομηνία η, και άρα το Πάσχα θα εορτάζεται **2 + [19[E]<sub>19</sub> + 16]<sub>30</sub> + 7-η Απριλίου** και τελικά θα έχουμε

**ημερομηνία εορτασμού του Πάσχα των ορθοδόξων το έτος E**

$$[19[E]_{19} + 16]_{30} - [E + [\frac{E}{4}] - [\frac{E}{100}] + [\frac{E}{400}]] + [19[E]_{19} + 16]_{30} + 9 \text{ Απριλίου.}$$

### ΓΛΩΣΣΑΡΙΟ

**Συνοδικός μήνας:** Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δυο ομώνυμες φάσεις της Σελήνης. Ισούται με 29 ημέρες, 12 ώρες, 44 λεπτά, 2,8 δεύτερα ή 29,530588 ημέρες.

**Αστρικός μήνας:** Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δυο διαδοχικές εμφανίσεις της Σελήνης στον ίδιο απλανή αστέρα. Ισούται με 27 ημέρες 7 ώρες 43 λεπτά 11,5 δευτερόλεπτα.

**Αστρικό έτος:** Ο χρόνος που χρειάζεται η γη , για να συμπληρώσει μια περιφορά γύρω από τον ήλιο. Ισούται με 365,256374 ημέρες.

**Τροπικό έτος:** Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δυο διαβάσεις του κέντρου του ηλιακού δίσκου από το εαρινό ισημερινό σημείο  $\gamma$ , δηλαδή το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών ισημεριών. Το τροπικό έτος ισούται με 365,24219879 μέρες ηλιακές ημέρες. Στην καθημερινή μας ζωή δε χρησιμοποιούμε τα αστρικά έτη αλλά τα τροπικά ,διότι αυτά αντιλαμβανόμαστε από τη συνεχή εναλλαγή των εποχών του έτους.

**Πολιτικό έτος:** Επειδή η διάρκεια του τροπικού έτους δεν έχει ακέραιο αριθμό ημερών και στην πρακτική ζωή δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση των ετών, θεσπίστηκε το πολιτικό έτος, με ακέραιο πάντοτε αριθμό ημερών .

Για να υπάρξει εναρμόνιση μεταξύ της φυσικής διάρκειας του τροπικού έτους και της διάρκειας του πολιτικού έτους, επινοήθηκαν κατά καιρούς τα διάφορα ημερολόγια.

$[x]$  : Δηλώνει το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού, δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν υπερβαίνει τον αριθμό  $x$ . π.χ.  $[3,14]=3$  ,  $[0,5678]=0$  ,  $[-4,67]=-5$

$[x]_v$  : Δηλώνει το υπόλοιπο της διαίρεσης του ακέραιου αριθμού  $x$ , με τον ακέραιο αριθμό  $v$ . π.χ.  $[47]_3=2$  ,  $[100]_7=2$ . Συχνά χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός  $\text{mod}(x,v)$ .



**ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑΣ ΕΟΡΤΑΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΑΣΧΑ ΤΩΝ ΟΡΘΟΔΟΞΩΝ**

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΩΝ ΕΟΡΤΑΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΑΣΧΑ (ΣΕ ΗΜΕΡΕΣ ΑΠΡΙΛΙΟΥ)**

<b>ΕΤΟΣ</b>	<b>ΠΑΣΧΑ</b>		<b>ΕΤΟΣ</b>	<b>ΠΑΣΧΑ</b>
2000	30		2053	13
2001	15		2054	33
2002	35		2055	18
2003	27		2056	9
2004	11		2057	29
2005	31		2058	14
2006	23		2059	34
2007	8		2060	25
2008	27		2061	10
2009	19		2062	30
2010	4		2063	22
2011	24		2064	13
2012	15		2065	26
2013	35		2066	18
2014	20		2067	10
2015	12		2068	29
2016	31		2069	14
2017	16		2070	34
2018	8		2071	19
2019	28		2072	10
2020	19		2073	30
2021	32		2074	22
2022	24		2075	7
2023	16		2076	26
2024	35		2077	18
2025	20		2078	38
2026	12		2079	23
2027	32		2080	14
2028	16		2081	34
2029	8		2082	19
2030	28		2083	11
2031	13		2084	30
2032	32		2085	15
2033	24		2086	7
2034	9		2087	27
2035	29		2088	18
2036	20		2089	31
2037	5		2090	23
2038	25		2091	8
2039	17		2092	27
2040	36		2093	19
2041	21		2094	11
2042	13		2095	24
2043	33		2096	15
2044	24		2097	35
2045	9		2098	27
2046	29		2099	12
2047	21			
2048	5			

2049	25		
2050	17		
2051	37		
2052	21		

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

**ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ**  
**Adolph Hurwitz**

**ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ**  
**ΒΛΑΜΟΣ-ΡΑΠΠΟΣ-ΨΑΡΡΑΚΟΣ**

**Η ΟΔΥΣΣΕΙΑ ΤΩΝ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΩΝ τόμοι Α,Β**  
**Στράτος Θεοδοσίου – Μάνος Δανέζης**

**ΜΕΤΡΩΝΤΑΣ ΤΟΝ ΑΧΡΟΝΟ ΧΡΟΝΟ**  
**Στράτος Θεοδοσίου – Μάνος Δανέζης**

**ΜΕΓΑΛΗ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ**  
**WOLFGANG SCHROEDER**

**ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑ**  
**Κωτσάκη – Χασάπη**

<http://www.newadvent.org/cathen/05480b.htm>

**Gauss Formula for Julian Date of Passover**  
**Zvi Har El**

<http://www.assa.org.au/edm.html>

<http://michaeltompson.org/technikos/easter.php>

<http://en.wikipedia.org/wiki/Computus>

[http://www.carnaval.com/easter/calculating\\_easter.htm](http://www.carnaval.com/easter/calculating_easter.htm)

<http://www.webexhibits.org/calendars/calendar-christian-easter.html>

<http://www.eortologio.gr/arthra/paschalion.php>

[http://www.saintlucas.gr/ARTHRA\\_MELETES/HMEROMHνια\\_PASXA.htm](http://www.saintlucas.gr/ARTHRA_MELETES/HMEROMHνια_PASXA.htm)

[http://vagia-gr.blogspot.com/2009/04/blog-post\\_6290.html](http://vagia-gr.blogspot.com/2009/04/blog-post_6290.html)