ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΘΑΡΙΘΜΩΝ

Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων και απείρων αριθμών

Ο όρος "άπειρο" ανήκει αυτός καθ' εαυτόν στη φιλοσοφία. Στα Μαθηματικά παρουσιάζεται υπό δυο εκφάνσεις: Το "εν δυνάμει άπειρο" και το "εν ενεργεία άπειρο". Η πατρότητα αυτών των όρων αποδίδεται στον Αριστοτέλη το Σταγειρίτη (384-322 π.Χ.) και η διάκρισή τους συνίσταται στα ακόλουθα:

Το μεν "εν δυνάμει άπειρο" αφορά μια μεταβλητή ποσότητα η οποία <u>γίνεται</u> άπειρη, δηλαδή ενώ παραμένει διαρκώς πεπερασμένη, δύναται να γίνει μεγαλύτερη από μια τυχαία, αλλά ορισμένη θετική ποσότητα, οσοδήποτε μεγάλη. Για παράδειγμα η μεταβλητή ν η οποία παίρνει τιμές από το σύνολο $N=\{1,2,\ldots,\nu,\ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών, γίνεται απείρως μεγάλη. Στην κατηγορία του "εν δυνάμει απείρου" ανήκει και η περίπτωση κατά την οποία μια μεταβλητή ποσότητα μπορεί να γίνει απείρως μικρή, όπως λ.χ. η ποσότητα $\frac{1}{\nu}$, όπου το ν διατρέχει το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Το "εν ενεργεία άπειρο" αφορά μια σταθερή ποσότητα, η οποία <u>είναι</u> άπειρη, όπως για παράδειγμα, όταν αναφερόμαστε στο σύνολο $N=\{1,2,3,\ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών, από την άποψη του "πλήθους" των στοιχείων αυτού.

Μαθηματικοί και φιλόσοφοι παλεύουν με τις έννοιες του απείρου και των απειροσυνόλων από τις μέρες των αρχαίων Ελλήνων και τα παράδοξα του Ζήνωνα (450 π.Χ.) είναι μια από τις πρώτες ενδείξεις για τις δυσκολίες που αντιμετωπίστηκαν.

Ο ίδιος ο Αριστοτέλης αρνείται την ύπαρξη του "εν ενεργεία" απείρου, ενώ κατά την διάρκεια του Μεσαίωνα βρέθηκε ότι η αποδοχή του ενεργού απείρου οδηγεί σε παράδοξα στην Γεωμετρία. Για παράδειγμα, τα σημεία δυο ομόκεντρων κύκλων, μπορούν

1.

να τεθούν σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία, θεωρώντας τα σημεία τομής τους με μια κοινή ακτίνα τους, ενώ φαίνεται ότι η περιφέρεια της μεγαλύτερης ακτίνας περιέχει περισσότερα σημεία.

Μπροστά σε μια παραδοξότητα απορρέουσα από την αποδοχή του εν ενεργεία απείρου, βρέθηκε και ο Γαλιλαίος (1638) παρατηρώντας ότι οι θετικοί ακέραιοι μπορούν να αντιστοιχισθούν ένα προς ένα με τα τετράγωνά τους, ενώ το σύνολο των τετραγώνων των φυσικών αριθμών είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου όλων των φυσικών. Για να αποφευχθούν τα παράδοξα αυτά, συμπέρανε ο Γαλιλαίος, πρέπει να απορριφθεί η ιδέα του ολοκληρωμένου απειροσυνόλου.

Ο Γκάους σ' ένα γράμμα του προς τον Σουμάχερ το 1831 γράφει: "Διαμαρτύρομαι για την χρήση μιας άπειρης ποσότητας ως πραγματικής: αυτό στα μαθηματικά δεν επιτρέπεται ποτέ. Το άπειρο είναι μόνο ένας τρόπος του λέγειν κατά τον οποίο μπορεί κανείς να μιλάει για τα όρια στα οποία ορισμένοι λόγοι μπορούν να πλησιάσουν όσο κοντά θέλουμε, ενώ άλλοι μπορούν να αυξάνονται απεριόριστα".

Ο Κωσύ, επίσης αρνήθηκε την ύπαρξη εν ενεργεία απείρων συνόλων στηριζόμενος στην παράδοξη βάση ότι ένα τέτοιο σύνολο μπορεί να τεθεί σε ένα προς ένα αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολό του.

Ο Μπολτσάνο (1781-1848) ήταν ο πρώτος που έκανε θετικά βήματα προς την παραδοχή ότι υπάρχουν πραγματικά τα άπειρα σύνολα. Υποστήριζε μάλιστα ότι το γεγονός ότι ένα άπειρο σύνολο μπορεί να τεθεί σε ένα προς ένα αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολό του πρέπει απλώς να γίνει αποδεκτό ως γεγονός. Ωστόσο το έργο του Μπολτσάνο αν και ριζοσπαστικό ήταν στο σύνολό του μάλλον φιλοσοφικό παρά μαθηματικό.

Μια αληθινή μαθηματική μελέτη των άπειρων συνόλων έγινε σε μια συμπαγή εργασία του G. Cantor προς το τέλος του δέκατου ένατου αιώνα.

2.

Αυτήν την μελέτη, που έμελλε να διαποτίσει με τα αποτελέσματά της όλα σχεδόν τα Μαθηματικά του αιώνα μας, θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε παρακάτω.

Τα Μαθηματικά θεωρούν την έννοια του συνόλου ως πρωταρχική, κάτι ανάλογο π.χ. με τις έννοιες του σημείου, της ευθείας του, επιπέδου και του χώρου στη Γεωμετρία. Ο Κάντορ την περιέγραψε ως εξής: «Με τη λέξη "σύνολο" εννοούμε μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα σαφώς ορισμένων και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας».

Όσο ασαφής κι αν είναι αυτός ορισμός, συνεπάγεται δυο βασικές ιδιότητες: 1. Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ή μέλη. Γράφουμε

$x \in A \iff$ το αντικείμενο x είναι μέλος του (ή ανήκει στο) A

2. Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του, δηλαδή αν A, B είναι δυο σύνολα τότε

$A=B \iff (\forall x)[x\in A \iff x\in B]$. Αυτό το τελευταίο λέγεται ιδιότητα της έκτασης.

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα (μοναδικό σύμφωνα με την (2)) σύνολο που δεν έχει στοιχεία. Το σύνολο αυτό το ονομάζουμε κενό σύνολο και το συμβολίζουμε με $\emptyset$.

Αν A, B είναι σύνολα, τότε λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B, όταν κάθε στοιχείο του A ανήκει και στο B. Συμβολικά

$A\subseteq B \iff (\forall x)[x\in A \Rightarrow x\in B]$

Αν το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B γράφουμε $A\subsetneq B$ και είναι $A\subsetneq B \iff [A\subseteq B$ και $A\neq B]$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$A=B \iff A\subseteq B \text{ και } B\subseteq A.$$

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι τα στοιχεία ενός συνόλου γράφουμε $A=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$.

3

Αν P είναι μια συνθήκη που ορίζει κάποια ιδιότητα των αντικειμένων x, τότε $A = \{x / P(x)\}$ είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων που ικανοποιούν την συνθήκη P. Δηλαδή για κάθε x, $x \in A \Longleftrightarrow P(x)$.

Για όλα τα σύνολα A, B ορίζουμε:

$A \cup B = \{x / x \in A$ ή $x \in B\}$ (η ένωση των A, B)

$A \cap B = \{x / x \in A$ και $x \in B\}$ (η τομή των A, B)

$A \setminus B = \{x / x \in A$ και $x \notin B\}$ (η διαφορά των A, B)

Επίσης η ένωση και η τομή μιας ακολουθίας συνόλων ορίζεται με τον ίδιο τρόπο:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \{x / (\exists n \in \mathbb{N}) [x \in A_n]\}$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{x / (\forall n \in \mathbb{N}) [x \in A_n]\}$$

Με τον συμβολισμό $f : A \to B$ εννοούμε ότι η f είναι συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε μέλος x του A συνόλου ακριβώς ένα στοιχείο $f(x)$ του B. [Πολλές φορές για πιο συνοπτική περιγραφή μιας συνάρτησης χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $(x \mapsto f(x))$. π.χ ο συμβολισμός $(x \mapsto x^2)$ δηλώνει μια συνάρτηση, που σε κάθε πραγματικό αριθμό x, αντιστοιχίζει το τετράγωνό του].

Μια συνάρτηση $f : A \to B$ λέγεται:

α) μονομορφισμός ή ένα προς ένα (συμβ. $f : A \rightarrowtail B$) όταν
$$(\forall x, x' \in A) [f(x) = f(x') \Rightarrow x = x']$$

β) επιμορφισμός ή συνάρτηση επί (συμβ. $f : A \twoheadrightarrow B$) όταν
$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) [f(x) = y]$$

γ) ένα προς ένα αντιστοιχία (συμβ. $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$) όταν
$$(\forall y \in B)(\exists! x \in A) [f(x) = y]$$

4

Ας είναι $f: X \to \Psi$ μια συνάρτηση και $A \subseteq X$.
Ορίζουμε $f[A] = \{ f(x) / x \in A \}$ (η εικόνα του A από την f)
Αν $B \subseteq \Psi$ τότε ορίζουμε:
$f^{-1}[B] = \{ x \in X / f(x) \in B \}$ (η αντίστροφη εικόνα του B από την f)

Όταν η f είναι ένα προς ένα και επί, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση $f^{-1}: \Psi \to X$ που λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f, από την σχέση: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.

Η σύνθεση δύο συναρτήσεων $f: A \to B$, $g: B \to \Gamma$ είναι μια νέα συνάρτηση $h: A \to \Gamma$ που ορίζεται από την σχέση $h(x) = g(f(x))$ (συμβολικά γράφουμε $h = g \circ f$ δηλ. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$)

Αν $A \subseteq X$ το συμπλήρωμα του A ως προς X είναι το σύνολο $X \smallsetminus A$. Συμβολικά $CA = A' = X \smallsetminus A$.
Παραθέτουμε τώρα έναν κατάλογο βασικών ιδιοτήτων για τις πράξεις των συνόλων που ορίσαμε και τις συναρτήσεις:

$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$, $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$

$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$

$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$

$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Αν f ~~ισομορφισμός~~ μονομορφισμός τότε i) $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$
ii) $f[A \smallsetminus B] = f[A] \smallsetminus f[B]$, iii) $f[\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k] = \bigcap_{k=1}^{\infty} f[A_k]$.

5

Λέμε πολλές φορές ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών, το σύνολο των ρητών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι απειροσύνολα, δηλαδή περιέχουν απείρου πλήθους στοιχεία. Το φυσιολογικό ερώτημα που τίθεται αμέσως, είναι αν το άπειρο μέγεθος του καθενός από τα παραπάνω σύνολα είναι ίδιο, δηλαδή αν οι ρητοί π.χ. είναι σε πλήθος όσοι και οι φυσικοί ή οι πραγματικοί.

Πριν από τη μελέτη του Κάντορ, οι μαθηματικοί γνώριζαν μόνο ένα άπειρο, που συμβολιζόταν με ∞, κι αυτό το σύμβολο χρησιμοποιούνταν χωρίς διάκριση για να παραστήσει τον «αριθμό» των στοιχείων κάποιου συνόλου σαν κι αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω. Με την εργασία του Κάντορ εκτέθηκε μια εντελώς νέα άποψη και επιτεύχθηκε μια κλίμακα και μια αριθμητική των απείρων.

Ορισμός: Δυο σύνολα A, B (λέμε ότι) είναι ισοπληθικά ή ισοδύναμα ή ίσα σε πλήθος αν υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία των στοιχείων τους.

Συμβολικά $A =_c B \overset{\text{ορ}}{\iff} (\exists f)[f : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow B]$

(χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $A \sim B$).

Ο παραπάνω ορισμός είναι εύλογος στην περίπτωση που τα A, B είναι πεπερασμένα. Έστω π.χ. ότι A είναι το σύνολο των μαθητών μιας τάξης και B το σύνολο των καρεκλών της τάξης. Για να συγκρίνουμε τα μεγέθη των A και B μπορούμε να βάλουμε τους μαθητές να καθίσουν ο καθένας σε μια καρέκλα. Αν δεν περισσέψει καμιά καρέκλα και όλοι οι μαθητές είναι καθισμένοι τότε $A \sim B$. Αν περισσέψουν μαθητές, αυτό θα σημαίνει ότι το πλήθος των μαθητών είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των καρεκλών $A \gneq_c B$, ενώ αν περισσέψουν καρέκλες αυτό θα σημαίνει ότι $A \lneq_c B$.

6

Η συμβολή του Κάντορ βρίσκεται στο γεγονός, ότι αντιλήφθηκε την σημασία της αρχής της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας και στο κουράγιο με το οποίο την οδήγησε μέχρι τις ακραίες συνέπειές της αποδεχόμενος την ισχύ της ακόμη και στην περίπτωση των απειροσυνόλων.

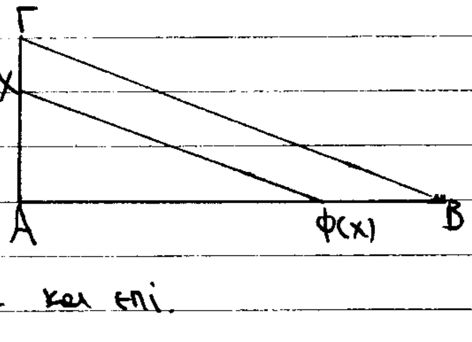
Ορισμός 2 Σε κάθε σύνολο A αντιστοιχούμε ένα σύμβολο $|A|$ που το λέμε <u>πληθάριθμο</u> του A, έτσι ώστε δυο σύνολα να έχουν σαν αντίστοιχό τους το ίδιο σύμβολο ακριβώς όταν είναι ισοδύναμα.
Δηλ. $|A| = |B| \iff A =_c B \iff A \sim B$

Παραδείγματα: 1. Έστω $A = \{2, 4, 6, \ldots\} \subset \mathbb{N}$
τότε η συνάρτηση $\mathbb{N} \ni \nu \mapsto 2\nu \in A$ είναι ένα προς ένα και επί, οπότε $|A| = |\mathbb{N}|$ ενώ $A \subsetneq \mathbb{N}$.

2. Αν $T = \{1, 4, 9, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to T$ με $f(\nu) = \nu^2$ είναι 1-1 και επί, οπότε $|T| = |\mathbb{N}|$

3. $(0,1) =_c (0,2)$ πράγματι η συνάρτηση $\phi : (0,1) \to (0,2)$ με $\phi(x) = 2x$ είναι 1-1 και επί.

4. Όλα τα ευθύγραμμα τμήματα περιέχουν το ίδιο "πλήθος" σημείων. Πράγματι ας είναι AB, $A\Gamma$ δυο ευθ. τμήματα, τοποθετημένα όπως στο διπλανό σχήμα. Η συνάρτηση $\phi : A\Gamma \to AB$ όπου $\phi(x)$ σημείο του AB ώστε $x\phi(x) \parallel B\Gamma$ είναι προφανώς 1-1 και επί.



Παρατήρηση 1. Κατά τον Κάντορ πληθάριθμος είναι ότι απομένει

7

από ένα σύνολο αν αφαιρέσουμε την φύση των στοιχείων του και τη διάταξή τους. Για να δείξει μάλιστα αυτή την διπλή αφαίρεση συμβόλισε τον πληθάριθμο με $\overline{\overline{A}}$. Έτσι σύμφωνα με το σύγχρονο συμβολισμό που ακολουθήσαμε εμείς είναι $\overline{\overline{A}} = |A|$.

2. Το κοινό χαρακτηριστικό των πεπερασμένων ισοδύναμων συνόλων είναι το πλήθος των στοιχείων τους. Στην περίπτωση αυτή ο πληθάριθμος του συνόλου είναι ένας φυσικός αριθμός που δείχνει το πλήθος των στοιχείων του.

3. Συχνά τον πληθάριθμο ενός συνόλου τον ονομάζουμε και δύναμη ή ισχύ του συνόλου.

ορισμός: Το σύνολο A είναι μικρότερο-ίσο του B (ως προς το πλήθος) αν είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του B. συμβολικά $A \leq_c B \Leftrightarrow (\exists \Gamma)[\Gamma \subseteq B$ και $A =_c \Gamma]$
ή $|A| \leq |B| \Leftrightarrow (\exists \Gamma)[\Gamma \subseteq B$ και $|A| = |\Gamma|]$

• **Πρόταση:** $|A| \leq |B| \Leftrightarrow (\exists f)[f : A \rightarrowtail B]$

απόδειξη

Αν $|A| = |\Gamma|$ όπου $\Gamma \subset B$ και η $f : A \twoheadrightarrow \Gamma$ φανερώνει αυτή την ισοδυναμία τότε η f είναι ένας μονομορφισμός από το A στο B. Αντιστρόφως αν υπάρχει $f : A \rightarrowtail B$ τότε $A =_c f[A] \subseteq B$ δηλαδή $|A| \leq |B|$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι:

$A \leq_c A$

$A \leq_c B$ και $B \leq_c \Gamma \Rightarrow A \leq_c \Gamma$

δηλαδή η σχέση $\leq_c$ είναι σχέση διάταξης. (βλ. 22 σελ.)

8

<u>ορισμός:</u> Ένα σύνολο λέγεται <u>πεπερασμένο</u>, αν υπάρχει φυσικός αριθμός n, ώστε

$$A =_c \{ i / i < n \} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Διαφορετικά το A λέγεται <u>άπειρο</u>.

<u>Παρατήρηση:</u> Το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι πεπερασμένο, αφού

$$\emptyset \sim \{ i / i < 0 \}.$$

Το σύνολο A λέγεται <u>αριθμήσιμο</u> (ή απαριθμητό) αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Αλλιώς το A λέγεται υπεραριθμήσιμο (ή αναπαρίθμητο ή μη αριθμήσιμο).

Πρόταση: Ένα σύνολο A είναι αριθμήσιμο τότε και μόνο τότε όταν $A = \emptyset$ ή το A δέχεται απαρίθμηση, δηλαδή υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \to A$, ώστε $A = \{ \pi(0), \pi(1), \pi(2), \dots \}$.

<u>απόδειξη</u>

Έστω ότι το A είναι άπειρο αριθμήσιμο. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει αντιστοιχία $\pi : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow A$. Αν το A είναι πεπερασμένο μη κενό, τότε υπάρχει αντιστοιχία $f : \{ i / i < n \} \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow A$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$. ορίζουμε την απαρίθμηση π, ως εξής

$$\pi(i) = \begin{cases} f(i), & \text{αν } i < n \\ f(0), & \text{αν } i \geq n. \end{cases}$$

Αντίστροφα, έστω A μη πεπερασμένο και $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$, απαρίθμηση του A. Πρέπει να κατασκευάσουμε μια απαρίθμηση $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ δίχως επαναλήψεις, ώστε η f είναι αντιστοιχία 1-1 και επί. Η λογική της κατασκευής αυτής είναι απλώς να διαγράψουμε τις επαναλήψεις από την απαρίθμηση π.

Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε την f αναδρομικά ως εξής:

9

Επειδή το A δεν είναι πεπερασμένο, για κάθε ακολουθία $a_0, a_1, \dots, a_n$ στοιχείων του A, υπάρχει κάποιο m έτσι ώστε $\pi(m) \notin \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Θέτουμε:

$f(0) = \pi(0)$,

$m_n =$ το ελάχιστο $m > n$ ώστε $\pi(m) \notin \{f(0), \dots, f(n)\}$,

$f(n+1) = \pi(m_n)$

Η f είναι $1-1$ και αρκεί να δείξουμε ότι είναι και επί, δηλαδή κάθε $x \in A$ είναι τιμή της.

Αν $x = \pi(0)$ τότε εξ ορισμού $x = f(0)$.

Έστω $x = \pi(n+1)$. Αν $x \in \{f(0), \dots, f(n)\}$ τότε $x = f(i)$ για κάποιο $i \leq n$ και αν $x \notin \{f(0), \dots, f(n)\}$ τότε εξ' ορισμού $m_n = n+1$ και $f(n+1) = \pi(m_n) = x$.

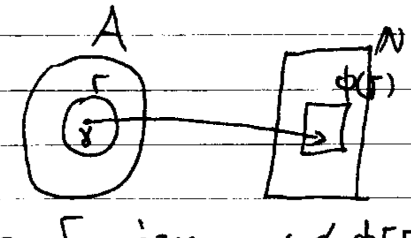
• **Πρόταση:** Κάθε υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη

Έστω A σύνολο αριθμήσιμο και $\Gamma \subset A$.

Τότε υπάρχει $\phi: A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$, $1-1$ και επί.

ορίζουμε έναν επιμορφισμό



$\pi: \mathbb{N} \to \Gamma$ ως εξής:

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

$\pi(\nu) = \phi^{-1}(\nu)$ όταν $\nu \in \phi[\Gamma]$

$\pi(\nu) = \gamma =$ κάποιο σταθερό στοιχείο του Γ, όταν $\nu \notin \phi[\Gamma]$

• Άσκηση: Αν το A είναι αριθμήσιμο και υπάρχει μονομορφισμός $f: B \rightarrowtail A$, τότε το B είναι επίσης αριθμήσιμο.

• Άσκηση: Αν το A είναι αριθμήσιμο και υπάρχει επιμορφισμός $f: A \twoheadrightarrow B$ τότε και το B είναι αριθμήσιμο.

10

Θεώρημα: (Πρώτη Διαγώνιος μέθοδος του Cantor)
Για κάθε ακολουθία $A_0, A_1, A_2, \ldots$ απαριθμητών συνόλων η ένωση $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cup A_1 \cup \ldots$ είναι επίσης απαριθμητό σύνολο.

απόδειξη

Αφού τα A_n είναι απαριθμητά σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση θα είναι $A_n = \emptyset$ ή θα υπάρχει επιμορφισμός $\pi^n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A_n$. Ας υποθέσουμε ότι $A_n \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$
(Αν $A_k = \emptyset$ για κάποιο k τότε απλά το παραλείπουμε από την ακολουθία, αφού η ένωσή του με τα άλλα σύνολα δεν μεταβάλλει το σύνολο A).
Θέτουμε $\pi^n(i) = \alpha_i^n$ οπότε για κάθε n, έχουμε:

$$A_n = \{\alpha_0^n, \alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots\}$$

κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα

$$\begin{array}{lllll}
A_0: & \alpha_0^0 & \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \alpha_3^0 \ \ldots \\
A_1: & \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \ \ldots \\
A_2: & \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \ \ldots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Μπορούμε να ορίσουμε μιαν απαρίθμηση του A, ακολουθώντας τα βέλη στο παραπάνω διάγραμμα:
Είναι: $A = \{\alpha_0^0, \alpha_0^1, \alpha_1^0, \alpha_0^2, \alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots\}$

ορίσαμε δηλαδή μια απαρίθμηση του A οπότε το A θα είναι απαριθμητό σύνολο.

11

Πόρισμα 1. Το σύνολο των ακέραιων αριθμών $\mathbb{Z}$, είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$. Το σύνολο των αρνητικών ακεραίων είναι αριθμήσιμο μέσω της αντιστοιχίας $x \mapsto -(x+1)$.

Πόρισμα 2: Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη

Το σύνολο $\mathbb{Q}^+$ των μη αρνητικών ρητών, είναι αριθμήσιμο διότι $\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N} \}$

και κάθε $\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N} \}$ είναι αριθμήσιμο μέσω της αντιστοιχίας $(m \mapsto \frac{m}{n})$. Όμοια και το σύνολο $\mathbb{Q}^-$ των αρνητικών ρητών είναι αριθμήσιμο, οπότε και η ένωση αυτών θα είναι αριθμήσιμη, δηλαδή το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

- Το αποτέλεσμα του πορίσματος 2 ακόμη και σήμερα, θεωρείται κάπως παράδοξο από τους πρωτόπειρους στην συνολοθεωρία, δεδομένου ότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό σύνολο, δηλαδή μεταξύ δυο ρητών περιέχονται άπειροι άλλοι ρητοί, και μάλιστα $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Q}$.

12

Το επόμενο βήμα του Cantor ήταν η απόδειξη ότι υπάρχουν και αναπαρίθμητα σύνολα, δηλαδή σύνολα με "πληθάριθμο" μεγαλύτερο από αυτόν των φυσικών αριθμών.

Θεώρημα: Το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών είναι μη αριθμήσιμο.

απόδειξη

(Το δεύτερο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor).

Έστω ότι το σύνολο των ακολουθιών είναι αριθμήσιμο. Τότε θα υπάρχει απαρίθμησή τους, έστω η εξής:

$$\alpha_n^1, \alpha_n^2, \alpha_n^3, \ldots$$

Εποπτικότερα είναι:

$$\alpha^1 : \alpha_1^1 \quad \alpha_2^1 \quad \alpha_3^1 \ \ldots$$

$$\alpha^2 : \alpha_1^2 \quad \alpha_2^2 \quad \alpha_3^2 \ \ldots$$

$$\alpha^3 : \alpha_1^3 \quad \alpha_2^3 \quad \alpha_3^3 \ \ldots$$

Ορίζουμε την ακολουθία $B_m = \alpha_m^m + 1$

Πρέπει να υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, ώστε $B_m = \alpha_m^k$

Δηλαδή:

$\alpha_m^k = \alpha_m^m + 1$. Ειδικότερα θέτοντας $m=k$ έχουμε: $\alpha_k^k = \alpha_k^k + 1 \iff 0 = 1$ άτοπο.

Άρα το σύνολο των ακολουθιών δεν είναι αριθμήσιμο.

13

Το επόμενο θεώρημα, ήταν το πρώτο αποτέλεσμα για την ευνοϊκή αποδοχή της θεωρίας του Cantor από την μαθηματική κοινότητα. Συγκεκριμένα ο Cantor μέσω της πληθικότητας του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, απέδειξε ότι υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί, και μάλιστα υπεραριθμήσιμου "πλήθους".

Απόδειξη για την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών είχε δώσει νωρίτερα ο Liouville. Η απόδειξή του όμως ήταν δύσκολη και αναφερόταν σε κάποιας ειδικής μορφής αριθμούς. Ο Cantor έδειξε κάτι πολύ πιο ισχυρό (ότι "σχεδόν όλοι" οι πραγματικοί είναι υπερβατικοί) χρησιμοποιώντας μόνο την ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

Θα δώσουμε παρακάτω δυο αποδείξεις για το μη αριθμήσιμο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα: Το σύνολο $[0,1]$ όλων των πραγματικών που περιέχονται μεταξύ του 0 και του 1, δεν είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη 1η

Προφανώς $\left\{\frac{1}{n+1} \,/\, n\in\mathbb{N}\right\} \subset (0,1)$ άρα

$\left|\left\{\frac{1}{n+1} \,/\, n\in\mathbb{N}\right\}\right| \leq |(0,1)|$. Θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να υφίσταται ισότητα στην παραπάνω ανίσωση. Εφόσον το $\left\{\frac{1}{n+1} \,/\, n\in\mathbb{N}\right\}$ είναι αριθμήσιμο, αυτό θα δείχνει ότι το $(0,1)$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Έστω (απαγωγή σε άτοπο) ότι το $(0,1)$ είναι αριθμήσιμο, και $x_1, x_2, \ldots$ είναι μια αρίθμηση αυτού. Δηλαδή

$$(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Κάθε αριθμός $x\in(0,1)$ έχει ένα μοναδικό δεκαδικό ανάπτυγμα, εκτός τους αριθμούς της μορφής $\frac{k}{10^n}$ που έχουν

14

δυο δεκαδικά αναπτύγματα, ένα με άπειρα μηδενικά, και ένα με άπειρα εννιάρια. (π.χ. $\frac{4}{10^2} = 0{,}0400\ldots$ ή $\frac{4}{10^2} = 0{,}03999\ldots$)
Αν συμφωνήσουμε να μην χρησιμοποιούμε αναπτύγματα με άπειρα 9 τότε σε κάθε αριθμό αντιστοιχεί ακριβώς ένα δεκαδικό ανάπτυγμα. Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$x_1 = 0{,}x_1^1 x_1^2 x_1^3 \ldots$$
$$x_2 = 0{,}x_2^1 x_2^2 x_2^3 \ldots$$
$$x_3 = 0{,}x_3^1 x_3^2 x_3^3 \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Όπου $x_j^i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ $\forall\, i,j \in \mathbb{N}^*$
Κατασκευάζουμε τώρα τον αριθμό $B \in (0,1)$ ως εξής
Αν $B = 0{,}B_1B_2B_3\ldots$ τότε

$$B_n = \begin{cases} 4 & \text{αν } x_n^n \neq 4 \\ 5 & \text{αν } x_n^n = 4 \end{cases}$$

Αφού $B \in (0,1)$ θα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε:
$B = x_k$. Άρα $B_k = x_k^k$ δηλαδή

$4 = x_k^k$ αν $x_k^k \neq 4$ ή $5 = x_k^k$ αν $x_k^k = 4$ άτοπο.
Καταλήξαμε σε άτοπο με την υπόθεση ότι το $(0,1)$ είναι αριθμήσιμο, άρα το $(0,1)$ <u>δεν</u> είναι αριθμήσιμο.

Πόρισμα: Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών δεν είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη
Η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1-2x}{x(1-x)}$ είναι 1-1 και επί. Άρα $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$! δηλαδή το $(0,1)$

15

έχει το ίδιο "πλήθος" στοιχείων με ολόκληρο το $\mathbb{R}$!

Παρατήρηση: Το γεγονός ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδικό ανάπτυγμα αποδεικνύεται βάσει του αξιώματος της πληρότητας. Το αξίωμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:
«Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα» (συμβολίζουμε αυτό το ελάχιστο άνω φράγμα με $\sup A$).

Με βάση το αξίωμα πληρότητας, μπορεί να αποδειχθεί και η εξής ιδιότητα:

Θεώρημα του κιβωτισμού: Αν $[\alpha_n, \beta_n]$ είναι μια ακολουθία κλειστών διαστημάτων ώστε να ισχύουν:

i) $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subset [\alpha_n, \beta_n]$

ii) $\lim(\beta_n - \alpha_n) = 0$

τότε υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$

Ας σημειωθεί ότι το θεώρημα του κιβωτισμού μαζί με την Αρχιμήδεια ιδιότητα (για κάθε πραγματικό αριθμό, υπάρχει φυσικός μεγαλύτερός του) είναι ισοδύναμα με το αξίωμα της πληρότητας.

Θα δώσουμε στη συνέχεια άλλη μια απόδειξη της μη αριθμησιμότητας του $\mathbb{R}$, όπου θα φαίνεται πιο ξεκάθαρα ο ουσιαστικός ρόλος της πληρότητας για την εξαγωγή του συμπεράσματος αυτού.

16

Θεώρημα: Το σύνολο $[\alpha,\beta]$ των πραγματικών αριθμών του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ είναι υπεραριθμήσιμο
απόδειξη 2η

Έστω ότι το $[\alpha,\beta]$ είναι αριθμήσιμο. Τότε θα υπάρχει ακολουθία (x_n) $n\in\mathbb{N}$ ώστε $[\alpha,\beta]=\{x_n / n\in\mathbb{N}\}$
Επιλέγουμε διάστημα $[\alpha_0,\beta_0]\subset[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $x_0\notin[\alpha_0,\beta_0]$ και $(\beta_0-\alpha_0)<\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$.
Επιλέγουμε στη συνέχεια διάστημα $[\alpha_1,\beta_1]\subset[\alpha_0,\beta_0]$ ώστε $x_1\notin[\alpha_1,\beta_1]$ και $(\beta_1-\alpha_1)<\frac{1}{2}(\beta_0-\alpha_0)<\frac{1}{2^2}(\beta-\alpha)$
Συνεχίζοντας επαγωγικά ορίζουμε έτσι μιαν ακολουθία διαστημάτων $[\alpha_n,\beta_n]$ για την οποία ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i) $[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]\subset[\alpha_n,\beta_n]$ ii) $x_n\notin[\alpha_n,\beta_n]$,
iii) $(\beta_n-\alpha_n)<\frac{1}{2^{n+1}}(\beta-\alpha)$

Από την (iii) προκύπτει ότι $\lim(\beta_n-\alpha_n)=0$ και το γεγονός αυτό μαζί με την (i) βάσει του θεωρήματος του Κιβωτισμού δίνουν ότι:
υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε $x\in\bigcap_{n=0}^{\infty}[\alpha_n,\beta_n]$ (*)

Αφού $x\in[\alpha_n,\beta_n]\subset[\alpha,\beta]$ θα υπάρχει $k\in\mathbb{N}$, ώστε $x=x_k$.
Τότε $x_k\in[\alpha_k,\beta_k]$ λόγω της (*) ενώ $x_k\notin[\alpha_k,\beta_k]$ λόγω της (ii). και καταλήγουμε σε αντίφαση.

Πόρισμα 1: Το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο
Πόρισμα 2: Το σύνολο A των άρρητων αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο.
αποδ. $\mathbb{R}=A\cup\mathbb{Q}$. Αν το A ήταν αριθμήσιμο, το ίδιο θα

17

έπρεπε να ισχύει και για το $\mathbb{R}$.

<u>ορισμός:</u> Αν A και B είναι σύνολα, το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών των A,B συμβολίζεται με $A\times B$ και λέγεται καρτεσιανό γινόμενο των A,B. Δηλαδή

$$A\times B=\{(x,y)\,/\,x\in A \text{ και } y\in B\}$$

Γενικότερα αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι σύνολα $(n\geq 2)$ το καρτεσιανό τους γινόμενο ορίζεται από την παρακάτω έκφραση:

$$A_1\times A_2\times\dots\times A_n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,/\,x_1\in A_1,\dots,x_n\in A_n\}$$

Αν όλα τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι ίσα με το σύνολο A, το καρτεσιανό τους γινόμενο συμβολίζεται με A^n.
δηλ. $A^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,/\,x_1,x_2,\dots,x_n\in A\}$.

Πρόταση: (1) Αν τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι απαριθμητά, τότε και το καρτεσιανό τους γινόμενο είναι απαριθμητό.

(2) Για κάθε απαριθμητό σύνολο A, τα A^n $(n\geq 2)$ και η ένωσή τους

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} A^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,/\,n\geq 2,\ x_1,x_2,\dots,x_n\in A\}$$

είναι επίσης απαριθμητά σύνολα.

απόδειξη

(1) Αν κάποιο A_i είναι κενό, τότε και το καρτεσιανό τους γινόμενο είναι κενό εξ' ορισμού. Διαφορετικά, για δυο σύνολα A, B έχουμε μιαν απαρίθμηση του B έστω $B=\{b_0,b_1,b_2,\dots\}$. Όμως $A\times B=\bigcup_{n=0}^{\infty}(A\times\{b_n\})$ και κάθε $A\times\{b_n\}$ είναι ισοπληθικό με το A (βάση της αντιστοιχίας $x\mapsto(x,b_n)$), επομένως απαριθμητό.

(2) Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι αν $A_1,\dots,A_n$ απαριθμητά τότε και το $A_1\times A_2\times\dots\times A_n$ είναι απαριθμητό.

18

Ορισμός: Ένας πραγματικός αριθμός α λέγεται αλγεβρικός αν είναι ρίζα κάποιου πολυωνύμου $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$ με ακέραιους συντελεστές $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_\nu$. ($\nu\geq 1$, $\alpha_\nu\neq 0$).

Συμβ.

α αλγεβρικός $\iff P(\alpha)=0$ και $\alpha_i\in\mathbb{Z}$, $i=0,1,2,\dots,\nu$, $\alpha_\nu\neq 0$

π.χ. Οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}+1$ είναι αλγεβρικοί, αφού ο καθένας είναι αντιστοίχως ρίζα των πολυωνύμων $P(x)=x^2-2$ και $Q(x)=(x-1)^3-5$.

Επίσης αλγεβρικός είναι και ο πραγματικός αριθμός που είναι ρίζα του πολυωνύμου x^5+x+1, ο οποίος όμως δεν μπορεί να εκφραστεί με ριζικά σύμφωνα μ' ένα βασικό θεώρημα της άλγεβρας.

Προφανώς κάθε ρητός $\frac{p}{q}$ είναι αλγεβρικός, αφού είναι ρίζα της εξίσωσης $qx-p=0$. $q,p\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$.

Οι αλγεβρικοί αριθμοί λοιπόν περιέχουν (σύνολο) τους ρητούς όμως παρόλα αυτά όπως θα δείξουμε δεν τους ξεπερνούν σε πλήθος.

Θεώρημα: Το σύνολο K των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη

Ονομάζουμε τάξη ενός πολυωνύμου $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$ με $\alpha_i\in\mathbb{Z}$, τον αριθμό $V=\nu+|\alpha_0|+|\alpha_1|+|\alpha_2|+\dots+|\alpha_\nu|$

Για κάθε $V>1$ υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους πολυώνυμα που έχουν τάξη V και καθένα απ' αυτά έχει πεπερασμένου πλήθους ρίζες. Αν K_V συμβολίσουμε το σύνολο των ριζών όλων των πολυωνύμων τάξης V, τότε κάθε K_V είναι πεπερασμένο και ισχύει $K=\bigcup_{V=2}^{\infty}K_V$. Άρα το K είναι απαριθμητό.

19

Επειδή όμως $\mathbb{Q} \subset K$ το K δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο, άρα θα είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα: Υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί

απόδειξη.

[Ένας αριθμός που δεν είναι αλγεβρικός, λέγεται υπερβατικός].

Αφού το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το K είναι αριθμήσιμο υποσύνολό του, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν και αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί και μάλιστα υπεραριθμησίμου πλήθους.

Παρατήρηση: Υπάρχουν μαθηματικοί (Ιντουισιονιστική σχολή) που δεν δέχονται την προηγούμενη απόδειξη. Αυτοί πιστεύουν ότι η μαθηματική ύπαρξη θεμελιώνεται μόνο όταν ένα από τα πράγματα των οποίων εξετάζεται η ύπαρξη κατασκευάζεται και εκτίθεται πραγματικά. Η απόδειξη π.χ. που δώσαμε παραπάνω για την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών δεν μας υποδεικνύει κανένα συγκεκριμένο τρόπο κατασκευής ενός απ' αυτούς. Η ύπαρξη θεωρείται αποδεδειγμένη δείχνοντας μόνο ότι η υπόθεση της μη ύπαρξης οδηγεί σε αντίφαση. Γι' αυτό το λόγο οι Ιντουισιονιστές δεν αποδέχονται την απαγωγή σε άτοπο ως μέθοδο απόδειξης.

Πάντως κατασκευαστική απόδειξη της ύπαρξης υπερβατικών αριθμών είχε δώσει ο Ζοζέφ Λιουβίλ το 1851 κάπου είκοσι χρόνια πριν ο Κάντορ δημοσιεύσει την μη κατασκευαστική του απόδειξη.

Σημείωση: Τον πληθάριθμο των αριθμήσιμων συνόλων θα τον συμβολίζουμε $\aleph_0$ (άλεφ μηδέν). Δηλ. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |K| = \aleph_0$

Τον πληθάριθμο των πραγματικών αριθμών τον συμβολίζουμε με c (δύναμη του συνεχούς). Δηλ. $|[\alpha, \beta]| = |\mathbb{R}| = c$.

20

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει την ύπαρξη δύο τάξεων απείρου, αυτών του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών (συμβ. $\aleph_0$) και αυτών του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών (συμβ. c). Σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα, υπάρχουν και πολλές άλλες τάξεις απείρου.

Ορισμός: Έστω A ένα σύνολο. Δυναμοσύνολο του A (συμβ. $P(A)$) ονομάζουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A. Δηλαδή

$$P(A) = \{X \,/\, X \subset A\}.$$

Θεώρημα (Cantor). Για κάθε σύνολο A ισχύει
$|A| < |P(A)|$ [Δηλαδή $|A| \leq |P(A)|$ και $|A| \neq |P(A)|$]

απόδειξη

Ισχύει $|A| \leq |P(A)|$ διότι η συνάρτηση $(x \overset{f}{\mapsto} \{x\})$ είναι 1-1 του A στο $P(A)$. Έτσι $A \sim f(A) \subset P(A)$.
Έστω ότι υπάρχει αντιστοιχία $\Pi : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow P(A)$ 1-1 και επί
[Δηλαδή έστω ότι $|A| = |P(A)|$]

Ορίζουμε το σύνολο

$$B = \{x \in A \,/\, x \notin \Pi(x)\}$$

Τότε $B \subset A$ και αφού η Π είναι επί, θα υπάρχει $\gamma \in A$ ώστε $B = \Pi(\gamma)$.

Τώρα είτε $\gamma \in B$ είτε $\gamma \notin B$.

Αν $\gamma \in B$ τότε $\gamma \notin \Pi(\gamma) = B$ άτοπο.

Αν $\gamma \notin B$ τότε $\gamma \in \Pi(\gamma) = B$ άτοπο. Επομένως η υπόθεση ότι $A \sim P(A)$ δεν μπορεί να είναι ορθή, το οποίο σημαίνει ότι $|A| < |P(A)|$.

Παρατήρηση: Ισχύει ότι:

$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| < |P(P(\mathbb{N}))| < \ldots,$$

21.

Θεώρημα (Schröder-Bernstein) Αν για τα σύνολα A, B ισχύει $A \leq_c B$ και $B \leq_c A$ τότε $A =_c B$
[Μ' άλλα λόγια $|A| \leq |B|$ και $|B| \leq |A|$ τότε $|A| = |B|$

απόδειξη

Αφού $|A| \leq |B|$ υπάρχει μονομορφισμός $f : A \rightarrowtail B$

Επίσης αφού $|B| \leq |A|$ υπάρχει μονομορφισμός $g : B \rightarrowtail A$

Ορίζουμε αναδρομικά τα εξής σύνολα:

$A_0 = A$ $\qquad$ $B_0 = B$

$A_{n+1} = g \circ f [A_n]$ $\qquad$ $B_{n+1} = f \circ g [B_n]$

Ισχύει ότι: $A_n \supseteq g[B_n] \supseteq A_{n+1}$ (1)

$B_n \supseteq f[A_n] \supseteq B_{n+1}$ (2)

[Θα αποδείξουμε την (1) με επαγωγή. (όμοια δουλεύουμε και για την (2))

Αν $n = 0$ $A_0 = A$ και προφανώς $g[B_0] \subseteq A = A_0$
ενώ $A_1 = g \circ f [A]$. Αν $\alpha \in A_1$ τότε υπάρχει $\alpha' \in A$ ώστε
$\alpha = g \circ f(\alpha') = g(f(\alpha'))$ και $f(\alpha') \in B_0 = B$, άρα $\alpha \in g[B_0]$
Δηλαδή $A_1 \subseteq g[B_0]$

Έστω ότι για κάποιο n ισχύει $A_n \supseteq g[B_n] \supseteq A_{n+1}$
Ας είναι $x \in g[B_{n+1}]$. Τότε υπάρχει $y \in B_{n+1}$ ώστε
$x = g(y)$. $y \in B_{n+1} = f \circ g [B_n]$ συνεπώς υπάρχει $w \in B_n$
έτσι ώστε $y = f(g(w))$. Τελικά $x = g(f(g(w)))$ και
$g(w) \in g[B_n] \subseteq A_n$ άρα $x \in A_{n+1}$ δηλ. $g[B_{n+1}] \subseteq A_{n+1}$.
Έστω τώρα $k \in A_{n+2} = g \circ f [A_{n+1}]$ τότε $k = g(f(w))$ όπου
$w \in A_{n+1} = g \circ f [A_n] \subseteq g[B_n]$. Άρα $w = g(\tau)$, $\tau \in B_n$
τελικά $k = g(f(g(\tau)))$ $\tau \in B_n$ ή $k = g(\lambda)$ όπου
$\lambda = f(g(\tau)) \in f \circ g [B_n] = B_{n+1}$, δηλαδή $k \in g[B_{n+1}]$
οπότε $A_{n+2} \subseteq g[B_{n+1}]$ και σύμφωνα με το συμπέρασμα
της επαγωγής θα είναι $A_n \supseteq g[B_n] \supseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$].

Σύμφωνα με τις (1), (2) έχουμε τις παρακάτω αλυσίδες

22

συνόλων: $A_0 \supseteq g[B_0] \supseteq A_1 \supseteq g[B_1] \supseteq A_2 \supseteq \dots$

$B_0 \supseteq f[A_0] \supseteq B_1 \supseteq f[A_1] \supseteq B_2 \supseteq \dots$

Ας είναι

$$A^* = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \quad , \quad B^* = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$$

Τότε $B^* = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \supseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} f[A_n] \supseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} B_{i+1} = B^*$ Άρα

$B^* = \bigcap_{i=0}^{\infty} f[A_n]$. Επειδή η f είναι 1-1 θα έχουμε:

$$f\Big[\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\Big] = \bigcap_{i=0}^{\infty} f[A_i] \quad \text{οπότε} \quad f(A^*) = B^*.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$A = A^* \cup (A_0 \setminus g[B_0]) \cup (g[B_0] \setminus A_1) \cup (A_1 - g[B_1]) \cup \dots$$

$$B = B^* \cup (B_0 - f[A_0]) \cup (f[A_0] - B_1) \cup (B_1 - f[A_1]) \cup \dots$$

όπου όλα τα σύνολα που εμφανίζονται στις παραπάνω ενώσεις είναι ξένα μεταξύ τους.

Αρκεί να δείξουμε ότι $f[A_n - g[B_n]] = f[A_n] - B_{n+1}$

και $g[B_n - f[A_n]] = g[B_n] - A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε όμως f μονομορφισμό άρα $f[A_n - g[B_n]] = f[A_n] - fg[B_n]$

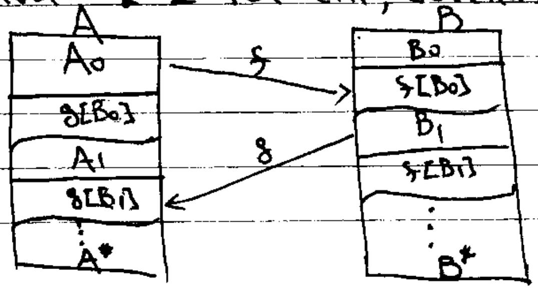
$= f[A_n] - B_{n+1}$.

Άρα από τα παραπάνω προκύπτει ότι η απεικόνιση

$\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow B$ με

$$\pi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } x \in A^* \text{ ή } (\exists n)[x \in A_n - g[B_n]] \\ g^{-1}(x) & \text{αν } x \notin A^* \text{ και } (\exists n)[x \in g[B_n] \setminus A_{n+1}] \end{cases}$$

είναι 1-1 και επί, συνεπώς $|A| = |B|$.



23

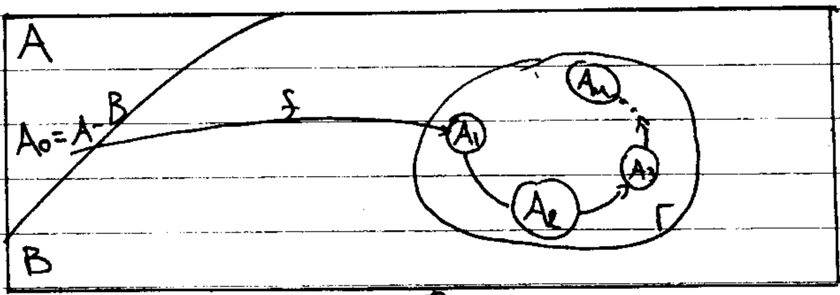
Δίνουμε τώρα και μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος Schröder-Bernstein

Θα δείξουμε πρώτα το εξής:

Λήμμα: Αν $\Gamma \subset B \subset A$ και αν $A \sim \Gamma$ τότε $A \sim B$

απόδειξη

Αφού $A \sim \Gamma$, υπάρχει $f : A \twoheadrightarrow \Gamma$, 1-1 και επί.
Θέτουμε $A_0 = A - B$. Τότε $f[A_0] = A_1 \subset \Gamma$. Επίσης $f[A_1] = A_2 \subset \Gamma$ . . . , $f[A_n] = A_{n+1} \subset \Gamma$ . . .



Ας είναι $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε την συνάρτηση $\bar{f} : A \to B$ ως εξής:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } x \in \Delta \\ x & \text{αν } x \notin \Delta \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η $\bar{f}$ είναι 1-1 και επί.

Αν $x_1, x_2 \in A$ και $x_1 \neq x_2$ τότε θα ισχύει ένα από τα παρακάτω

$x_1 \in \Delta$ και $x_2 \in \Delta$ οπότε $\bar{f}(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = \bar{f}(x_2)$

$x_1 \notin \Delta$ και $x_2 \notin \Delta$ οπότε $\bar{f}(x_1) = x_1 \neq x_2 = \bar{f}(x_2)$

$x_1 \in \Delta$ και $x_2 \notin \Delta$ οπότε $\bar{f}(x_1) = f(x_1) \in \Delta$ ενώ $x_2 = \bar{f}(x_2) \notin \Delta$. Άρα $\bar{f}(x_1) \neq \bar{f}(x_2)$

$x_1 \notin \Delta$ και $x_2 \in \Delta$ τότε $\bar{f}(x_1) = x_1 \notin \Delta$ ενώ $f(x_2) = \bar{f}(x_2) \in \Delta$ άρα $\bar{f}(x_1) \neq \bar{f}(x_2)$.

Άρα η $\bar{f}$ είναι 1-1.

24

Ας είναι τώρα $y \in B$. Τότε:
ή $y \in \Delta$ ή $y \notin \Delta$
Αν $y \notin \Delta$ τότε $\bar{f}(y) = y \in A$ αφού $\Delta \subset \Gamma \subset B \subset A$
Αν $y \in \Delta$, τότε επειδή $y \notin A - B$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $y \in A_{n+1} = f[A_n]$. Άρα υπάρχει $x \in A_n$ ώστε $y = f(x) = \bar{f}(x)$. Δείξαμε λοιπόν ότι η $\bar{f}$ είναι επί, συνεπώς $A \sim B$.

Θεώρημα (Schröder-Bernstein)
Αν για τα σύνολα A, B ισχύει
$A \leq B$ και $B \leq A$ τότε $A \sim B$

απόδειξη

Υπάρχουν συναρτήσεις $f: A \to B$ και $g: B \to A$ οι οποίες είναι 1-1 και επί.
Η συνάρτηση $f \circ g: B \to B$ και η $g \circ f: A \to A$ είναι συναρτήσεις 1-1. Άρα $g \circ f[A] \sim A$.
Επίσης $f[A] \subset B$ άρα $g[f[A]] \subset g[B] \subset A$
Θα είναι λοιπόν σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα $g[B] \sim A$
Όμως $g[B] \sim B$ και έτσι τελικά προκύπτει ότι $A \sim B$.

Η σχέση $\leq$ που ορίσαμε ανάμεσα σε δυο σύνολα, όπως δείξαμε ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:
i) $A \leq A$ (ανακλαστική)
ii) $(A \leq B$ και $B \leq \Gamma) \Rightarrow A \leq \Gamma$ (μεταβατική)
iii) $(A \leq B$ και $B \leq A) \Rightarrow A \sim B$ (αντισυμμετρική)
Είναι επομένως μια σχέση διάταξης, μέσα στην "κλάση" όλων των συνόλων. Λέμε "κλάση" διότι η έννοια του συνόλου όλων των συνόλων, είναι αντιφατική όπως θα δείξουμε παρακάτω.

25

Θεώρημα: $P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$

απόδειξη

Αφού $\mathbb{R} \sim [0,1]$, αρκεί να δειχτεί ότι $P(\mathbb{N}) \sim [0,1]$

- Δείχνουμε πρώτα ότι $P(\mathbb{N}) \leq [0,1]$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f: P(\mathbb{N}) \to [0,1]$ από τη σχέση:

$$\forall X \subset \mathbb{N}, \; f(X) = 0{,}x_0x_1x_2\ldots x_n\ldots$$

όπου $x_n = 1$ αν $n \in X$, $x_n = 0$ αν $n \notin X$

Αν $f(X) = f(Y)$ τότε $0{,}x_1x_2x_3\ldots = 0{,}y_1y_2y_3\ldots$ άρα $x_n = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (διότι οι παραστάσεις $0{,}x_1x_2x_3\ldots$ και $0{,}y_1y_2\ldots$ δεν τελειώνουν σε άπειρα 9)

Προκύπτει λοιπόν ότι $X = Y$, άρα η f είναι 1-1 και επομένως $P(\mathbb{N}) \leq [0,1]$.

- Θα δείξουμε τώρα ότι $[0,1] \leq P(\mathbb{N})$ (α)

Αν $t \in [0,1]$ τότε το t έχει ένα μοναδικό δεκαδικό ανάπτυγμα με άπειρο πλήθος μη μηδενικών ψηφίων ή με όλα τα ψηφία ίσα με μηδέν. Ας είναι $t = t_0t_1t_2\ldots t_n\ldots$ το ανάπτυγμα αυτό. Θεωρούμε την συνάρτηση $g: [0,1] \to P(\mathbb{N})$ με $g(t) = \{t_0, 10+t_1, 100+t_2, \ldots\}$

Αν $g(t) = g(p)$ τότε $\{t_0, 10+t_1, \ldots\} = \{p_0, 10+p_1, \ldots\}$ και ισχύει $10^i \leq p_i + 10^i \leq 10^i + 9$, $10^i \leq t_i + 10^i \leq 10^i + 9$

Άρα πρέπει $p_i = t_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$ δηλαδή $t = p$

Τελικά η g είναι 1-1 συνεπώς $[0,1] \leq P(\mathbb{N})$ (β).

Απο τις (α), (β) βάσει του Θ. S.B. προκύπτει ότι $[0,1] \sim P(\mathbb{N})$.

Δίνουμε άλλο ένα παράδειγμα συνόλου, που είναι ισοδύναμο από άποψη πληθαρίθμου με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Η κατασκευή του οφείλεται στον Cantor γι' αυτό και

26.

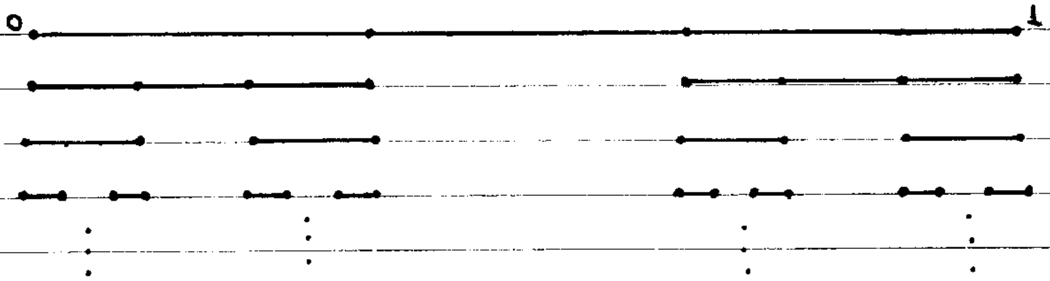
η ονομασία του φέρει το όνομά του.

Το σύνολο Cantor

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε τρία ίσα διαστήματα και αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο για το καθένα από τα απομένοντα διαστήματα $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3},1]$ και αφαιρούμε τα μεσαία ανοικτά διαστήματα $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ και $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο για τα 4 κλειστά διαστήματα που μένουν κ.ο.κ.

Αν $A = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \cup (\frac{1}{27}, \frac{2}{27}) \cup \ldots$ είναι η ένωση όλων των αφαιρουμένων ανοικτών διαστημάτων (αριθμήσιμου πλήθους), τότε το σύνολο $C = [0,1] - A$ ονομάζεται σύνολο του Cantor.



Το σύνολο Cantor μπορεί επίσης να ορισθεί με τον ακόλουθο τρόπο: Κάθε αριθμός $x \in [0,1]$ μπορεί να εκφρασθεί στο τριαδικό σύστημα αρίθμησης, με την μορφή

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} = 0,x_1x_2x_3\ldots \quad \text{όπου } x_k = 0,1,2$$

Το σύνολο C αποτελείται από εκείνα τα $x \in [0,1]$ για τα οποία $x_k = 0$ ή 2 $\forall k \in \mathbb{N}$. Αν x είναι ρητός της μορφής $\frac{m}{3^n}$, $m,n \in \mathbb{N}$ ο x έχει δύο τριαδικά αναπτύγματα π.χ. $\frac{1}{3} = 0,1000\ldots = 0,0222\ldots$ Στην περίπτωση αυτή $x \in C$ ακριβώς τότε όταν ένα από τα δύο αναπτύγματά του αποτελείται μόνο από 0 και 2.

27

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : C \to [0,1]$ που ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

Αν $x = 0,x_1x_2x_3\ldots \in C$ τότε $f(x)$ είναι εκείνο το σημείο του $[0,1]$ που έχει δυαδικό ανάπτυγμα το $0,\frac{x_1}{2}\frac{x_2}{2}\frac{x_3}{2}\ldots$

Η f δεν είναι 1-1 (αφού πχ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \in C$ και $f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3})$) είναι όμως επί του $[0,1]$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποσύνολο του C έστω Γ με $\Gamma \sim [0,1]$

Όμως $\Gamma \subset C \subset [0,1]$ και $\Gamma \sim [0,1]$ άρα σύμφωνα με ένα λήμμα που αποδείξαμε, θα ισχύει $C \sim [0,1]$.

Ώστε: Το σύνολο Cantor είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{R}$.

Έχουμε δείξει ότι υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλοι πληθάριθμοι. Στο παράδειγμα που ακολουθεί έχουμε ένα σύνολο με πληθάριθμο μεγαλύτερο του συνεχούς.

Θεώρημα: Το σύνολο των συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο διάστημα $[0,1]$ έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο του συνεχούς

απόδειξη

Ας είναι F το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο $[0,1]$ και T το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων με τιμές στο $[0,1]$. Τότε $T \sim [0,1]$ άρα $|F| \geq |[0,1]| = c$

Έστω ότι $|F| = c \Leftrightarrow F \sim [0,1]$. Θα υπάρχει λοιπόν μια συνάρτηση 1-1 και επί η οποία θα αντιστοιχεί σε κάθε συνάρτηση $f(x)$ έναν αριθμό $z \in [0,1]$. Ας είναι $f_z(x)$ αυτή η αντιστοιχία. Θεωρούμε μια συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(\omega) \neq f_\omega(\omega)$ $\forall\, \omega \in [0,1]$.

Αφού $g \in F$ θα είναι $g(x) = f_\lambda(x)$ για κάποιο $\lambda \in [0,1]$.

28

Ειδικότερα για $x=\lambda$ $g(\lambda)=f_\lambda(\lambda)$ άτοπο.
Άρα δεν είναι δυνατόν $F\sim[0,1]$ οπότε $|F|>|[0,1]|=c$.

Θεώρημα: Αν A άπειρο σύνολο τότε $|A|\geq \aleph_0$

απόδειξη

Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της επιλογής [: Έστω K ένα μη κενό σύνολο μη κενών συνόλων. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση F ορισμένη στο K, που ονομάζεται συνάρτηση επιλογής, τέτοια ώστε $F(A)\in A$, $\forall A\in K$] μπορούμε να επιλέξουμε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του A ως εξής:
Ας είναι a_1 τυχαίο στοιχείο του A. Αν υποθέσουμε ότι εκλέξαμε τα $a_1,a_2,\ldots,a_n\in A$ τότε το σύνολο $A-\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ είναι άπειρο (διαφορετικά το A θα ήταν πεπερασμένο) άρα μπορούμε να εκλέξουμε $a_{n+1}\in A-\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$
Έτσι εκλέξαμε για κάθε φυσικό n ένα διαφορετικό στοιχείο $a_n\in A$. Το σύνολο $\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι προφανώς αριθμήσιμο υποσύνολο του A, άρα $|A|\geq\aleph_0$.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, ο πληθάριθμος $\aleph_0$ του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών αντιπροσωπεύει το ελάχιστο άπειρο μέγεθος ενός συνόλου.

Θα συζητήσουμε τώρα το παράδοξο μπροστά στο οποίο βρίσκονταν οι μελετητές του Μεσαίωνα, από την αποδοχή του ενεργητικού απείρου, το γεγονός δηλαδή ότι ένα άπειρο σύνολο μπορεί να τεθεί σε 1-1 αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολό του. Θα δείξουμε ότι ακριβώς αυτή η ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να χαρακτηρίσουμε ένα σύνολο

29

ως άπειρο.

Θεώρημα: Ένα σύνολο είναι άπειρο αν και μόνο αν είναι ισοπληθές με γνήσιο υποσύνολό του

απόδειξη

Έστω A ένα άπειρο σύνολο. Τότε το A θα έχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο B. Υπάρχει $f: \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$, άρα για κάθε $x \in B$ υπάρχει ακριβώς ένα $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $f(n) = x$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h: A \to A$ ως εξής:

$$\forall x \in A, \quad h(x) = \begin{cases} f(n+1) & \text{αν } x \in B \text{ και } x = f(n) \\ x & \text{αν } x \in A - B. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η h είναι 1-1. Αν $h(x_1) = h(x_2)$ τότε $x_1, x_2 \in B$ ή $x_1, x_2 \in A - B$.

Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχουν φυσικοί m, n τέτοιοι ώστε $x_1 = f(m)$, $x_2 = f(n)$. Άρα $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow f(m+1) = f(n+1) \Rightarrow m+1 = n+1 \Rightarrow m = n \Rightarrow f(m) = f(n) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Στην δεύτερη περίπτωση $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Άρα η h είναι 1-1, επομένως $A \sim h[A]$. Όμως το $f(0) \notin h[A]$ γιατί αν $x \in B$ τότε $h(x) = f(n+1) \neq f(0)$, και αν $x \in A - B$ τότε $h(x) = x \neq f(0)$. Το $h[A]$ λοιπόν είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του A, που είναι ισοδύναμο με το A.

(αντίστροφα) Αν υποθέσουμε ότι το A είναι πεπερασμένο, τότε δεν μπορεί να είναι ισοπληθές με γνήσιο υποσύνολό του, και αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

30

Επίλογος

1. Υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλοι πληθάριθμοι (θ. Κάντορ) Στη γενική θεωρία πληθαρίθμων αποδεικνύεται ότι οι πληθάριθμοι των καλά διατεταγμένων συνόλων αποτελούν μια απέραντη αύξουσα ακολουθία στην οποία προηγούνται οι πεπερασμένοι πληθάριθμοι και αμέσως μετά έπεται ο $\aleph_0$. Ο αμέσως επόμενος του $\aleph_0$ συμβολίζεται με $\aleph_1$, ο αμέσως επόμενος του $\aleph_1$ με $\aleph_2$ κ.ο.κ. Έχουμε δηλαδή τη διαδοχή:

$$0<1<2<\dots<n<\dots<\aleph_0<\aleph_1<\aleph_2<\dots$$

Αφού, κατά το Θεώρημα καλής διάταξης, κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλά, έπεται ότι ο πληθάριθμος κάθε άπειρου συνόλου είναι κάποιος άλεφ. Δεν είναι γνωστό μέχρι σήμερα ποιος άλεφ είναι ο πληθάριθμος c του συνεχούς. Πολλές έρευνες, άκαρπες, έγιναν για να διαπιστωθεί αν υπάρχουν σύνολα με πληθάριθμο μεταξύ του $\aleph_0$ και του c. Για το λόγο αυτό οι μαθηματικοί διατύπωσαν την ακόλουθη πρόταση, γνωστή με το όνομα "<u>υπόθεση του συνεχούς</u>": « Δεν υπάρχουν σύνολα με πληθάριθμο μεγαλύτερο του $\aleph_0$ και μικρότερο του c ».

Ο K. Gödel (1940) έδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς, είναι συμβιβαστή με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων. Αργότερα ο P.J. Cohen (1963) έδειξε ότι και η άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς είναι συμβιβαστή με τα αξιώματα της θ. συνόλων. Έτσι η υπόθεση αυτή δεν μπορεί να αποδειχθεί. Μπορούμε να την προσθέσουμε σαν επί πλέον αξίωμα ή να προσθέσουμε την άρνησή της σαν επί πλέον αξίωμα. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι ισοδύναμη με την ισότητα $c=\aleph_1$.

2. Με βάση το αξίωμα της επιλογής που είναι ισοδύναμο με το θεώρημα της καλής διάταξης (Ένα διατεταγμένο σύνολο

31

λέγεται καλά διατεταγμένο, όταν κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο στοιχείο) αποδεικνύεται ότι κάθε δύο πληθάριθμοι είναι μεταξύ τους συγκρίσιμοι. Δηλαδή αν A, B είναι δύο σύνολα τότε ένα από τα παρακάτω μπορεί να συμβαίνει

$$|A|<|B| \text{ ή } |A|=|B| \text{ ή } |A|>|B|.$$

Λόγω αυτού του γεγονότος και του ότι ισχύουν και οι ιδιότητες

$$|A| \leq |A|, \ (|A| \leq |B| \text{ και } |B| \leq |A|) \Rightarrow |A|=|B|,$$

$$(|A| \leq |B| \text{ και } |B| \leq |\Gamma|) \Rightarrow |A| \leq |\Gamma|$$

προκύπτει ότι αν το σύνολο όλων των συνόλων υπήρχε η σχέση $\leq$, θα ήταν σχέση ολικής διάταξης σ' αυτό.

3. Μια από τις μεγάλες επιτυχίες της θεωρίας των πληθαρίθμων είναι η δημιουργία μιας όμορφης και χρήσιμης θεωρίας υπερπεπερασμένης αριθμητικής, δηλαδή της μελέτης των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της δύναμης σε άπειρα μεγέθη. Δίνουμε παρακάτω πολύ σύντομα και χωρίς αποδείξεις τους βασικούς ορισμούς και τις ιδιότητες των πράξεων.

<u>ορισμός:</u> Αν κ, λ είναι πληθάριθμοι, θεωρούμε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα A και B τέτοια ώστε $|A|=\kappa$, $|B|=\lambda$, τότε ορίζουμε: $\kappa+\lambda = |A \cup B|$.

<u>Ιδιότητες:</u>
- i) $\kappa+\lambda = \lambda+\kappa$
- ii) $(\kappa+\lambda)+\mu = \kappa+(\lambda+\mu)$
- iii) $(\kappa \leq \lambda \text{ και } \mu \leq \nu) \Rightarrow \kappa+\mu \leq \lambda+\nu$
- iv) $\kappa+\kappa = \kappa$
- v) $\kappa+\lambda = \text{μέγιστος}\{\kappa,\lambda\}$
- vi) ο νόμος διαγραφής της πρόσθεσης δεν είναι αληθής γενικά.
- vii) $\kappa \leq \lambda \Leftrightarrow \exists \mu : \lambda = \kappa+\mu$

32

<u>Ορισμός</u>: Αν κ, λ πληθάριθμοι και A, B σύνολα τέτοια ώστε ([illegible]) $\kappa = |A|$, $\lambda = |B|$ τότε ορίζουμε ως γινόμενο των κ, λ τον πληθάριθμο του $A \times B$. Δηλαδή $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$

<u>Ιδιότητες</u> i) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$ (ii) $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

iii) $(\kappa \leq \lambda$ και $\mu \leq \nu) \Rightarrow \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \nu$

iv) $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ (v) $\kappa \cdot \lambda =$ μέγιστος $\{\kappa, \lambda\}$

(vi) Ο νόμος της διαγραφής δεν αληθεύει ως ισχύει στον πολλαπλασιασμό των πληθαρίθμων.

(vii) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$

<u>Ορισμός δύναμης</u>: Με B^A συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\phi: A \to B$

Αν κ, λ είναι πληθάριθμοι και A, B σύνολα τέτοια ώστε $\kappa = |B|$ $\lambda = |A|$, ορίζουμε σαν κ^λ τον πληθάριθμο του συνόλου B^A. Δηλαδή $\kappa^\lambda = |B^A| = |B|^{|A|}$

<u>Ιδιότητες</u>: (i) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$ (ii) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$

(iii) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$ (iv) $(\kappa \leq \lambda$ και $\mu \leq \nu) \Rightarrow \kappa^\mu \leq \lambda^\nu$

(v) $2^{\aleph_0} = c$ $\aleph_0^{\aleph_0} = c$, $\nu^{\aleph_0} = c$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$

(vi) $\nu^c > c$.

4. Σχεδόν όλα τα θεωρήματα που αποδείξαμε στα προηγούμενα και αφορούν τα σύνολα, στηρίζονται στον διαισθητικό ορισμό του συνόλου όπως τον έδωσε ο Cantor. Εξετάζοντας προσεχτικά τις αποδείξεις αυτές, μπορούμε να δούμε ότι όλες στηρίζονται στην εξής αρχή:

33

Γενική Αρχή Συμπερίληψης: Για κάθε οριστική συνθήκη P, n μεταβλητών, υπάρχει ένα σύνολο $X = \{\vec{x} / P(\vec{x})\}$ με μέλη ακριβώς τις n-άδες αντικειμένων που ικανοποιούν την P, έτσι ώστε για κάθε $\vec{x}$,

$$\vec{x} \in X \iff P(\vec{x}) \quad (*)$$

Η ιδιότητα της έκτασης εξασφαλίζει ότι το πολύ ένα σύνολο X ικανοποιεί την $(*)$, και καλούμε αυτό το X έκταση ή συμπερίληψη της συνθήκης P.

Η Γενική Αρχή Συμπερίληψης έχει μια ακαταμάχητη έλξη, ακολουθεί τόσο φυσικά τις διαισθήσεις μας για την έννοια του συνόλου, ώστε το επόμενο θεώρημα καλείται «παράδοξο».

Το παράδοξο του Russel: Η Γενική Αρχή Συμπερίληψης δεν ισχύει

απόδειξη

Σύμφωνα με την Γ.Α.Σ. το σύνολο όλων των συνόλων

$V = \{x / x \text{ είναι σύνολο}\}$ είναι σύνολο.

Το V έχει την ιδιότητα να περιέχει τον εαυτό του σαν στοιχείο.

Με χρήση και πάλι της Γ.Α.Σ. το $R = \{x / x \text{ σύνολο και } x \notin x\}$ είναι επίσης σύνολο.

Από τον ορισμό όμως του R έχουμε την εξής αντίφαση:

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Ο Russel ανακοίνωσε το παραπάνω αποτέλεσμα το 1902, σ' ένα γράμμα του προς τον κορυφαίο Γερμανό φιλόσοφο και θεμελιωτή της μαθηματικής λογικής Gottlob Frege.

Το παράδοξο του Russel, απλό και σύντομο άλλαξε

34.

ήταν βέβαια η αξιωματική γεωμετρία του Ευκλείδη, που για 2000 χρόνια είχε εδραιωθεί ως "τέλειο" παράδειγμα μαθηματικής θεωρίας.
Αν μη τι άλλο, η αξιωματική μέθοδος ξεκαθαρίζει τα νερά και μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε, ό,τι μαθηματικές δυσκολίες και αντιφάσεις ίσως υπάρχουν στις βασικές διαισθήσεις μας για τα μαθηματικά αντικείμενα που μελετάμε, από τυχόν προβλήματα της λογικής, δηλαδή πιθανά λάθη στις αποδείξεις μας.

Στα παρακάτω εν συντομία θα αναφέρουμε τα αξιώματα του Zermelo, τα οποία αργότερα συμπληρώθηκαν από τον Fraenkel και έτσι δημιουργήθηκε το λεγόμενο Z-F αξιωματικό σύστημα της συνολοθεωρίας.

I. (Αξίωμα Έκτασης) Για κάθε σύνολα A, B

$$A = B \iff (\forall x)[x \in A \iff x \in B]$$

II. (Αξίωμα του Κενού συνόλου και του Ζεύγους)

(α) Υπάρχει ένα σύνολο $\emptyset$, που δεν έχει κανένα μέλος.

(β) $\forall x, y$ υπάρχει σύνολο $\{x, y\}$ με μοναδικά μέλη τα x, y.

III. (Αξίωμα Εξειδίκευσης ή Διαχωρισμού). Για κάθε σύνολο A και κάθε οριστική συνθήκη P (μονομελή), υπάρχει ένα σύνολο B τέτοιο ώστε: $x \in B \iff [x \in A \text{ και } P(x)]$.

IV. (Αξίωμα Δυναμοσυνόλου). Για κάθε αντικείμενο A, υπάρχει ένα σύνολο B με μόνα μέλη τα υποσύνολα του A. Δηλαδή

$$x \in B \iff X \text{ σύνολο και } X \subseteq A.$$

V. (Αξίωμα Ένωσης) Για κάθε αντικείμενο E, υπάρχει ένα σύνολο B με μέλη τα μέλη των μελών του E, δηλαδή ισχύει:

$$t \in B \iff (\exists X \in E)[t \in X] \quad \text{συμβολίζουμε } B = \cup E$$

VI. (Αξίωμα Απείρου) Υπάρχει σύνολο I που περιέχει το $\emptyset$ και το μονοσύνολο κάθε μέλους του, δηλαδή

$$\emptyset \in I \text{ και } (\forall x)[x \in I \Rightarrow \{x\} \in I]$$

36

<u>VII. (Αξίωμα Επιλογής)</u> Για κάθε διμελή σχέση $P \subseteq A \times B$ σε σύνολα A, B

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)[xPy] \Rightarrow (\exists f : A \to B)(\forall x \in A)(xPf(x))$$

<u>VIII. (Αξίωμα Αντικατάστασης)</u> Για κάθε σύνολο A και κάθε οριστικό τελεστή μιας μεταβλητής H, η εικόνα

$H[A] = \{H(x) \mid x \in A\}$ του A από τον H, είναι σύνολο.

Με βάση τα παραπάνω αξιώματα μπορούμε να αποδείξουμε όλα τα βασικά συμπεράσματα της θεωρίας του Cantor χωρίς αναφορά στον διαισθητικό "ορισμό" για τα σύνολα. Επίσης αποφεύγουμε παράδοξα σαν αυτά του Russel, αφού με τον περιορισμό της Γ.Α.Σ. δεν είναι γενικά σύνολο κάθε "κλάση" αντικειμένων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Τέλος πρέπει να επισημάνουμε το εξής στοιχείο: Η κοινή αντίληψη φιλοσόφων και μαθηματικών του 19ου αιώνα ήταν ότι η ύπαρξη απείρων συνόλων μπορεί να αποδειχθεί, και ειδικότερα, ότι είναι εφικτό να «κατασκευάσουμε» το σύνολο των φυσικών αριθμών από το τίποτα, «μόνο με τη λογική». Όλες οι αποδείξεις που είχαν προταθεί στηρίζονταν στην εσφαλμένη Γενική Αρχή Συμπερίληψης και οδηγούσαν σε αντιφάσεις. Σήμερα καταλαβαίνουμε τα πράγματα κάπως καλύτερα: η λογική μπορεί να ταξινομήσει τους ορθούς τρόπους του «σκέπτεσθαι» αλλά (από τη φύση της) δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη ουδενός, πόσο μάλλον απείρων συνόλων. Με τη σωστή και σαφή αντιμετώπιση αυτού του θέματος στη διατύπωση ξέχωρου Αξιώματος απείρου, ο Zermelo έκανε μια ιδιαίτερα σημαντική προσφορά στη διαδικασία αποβολής από τη λογική οντολογικών απαιτήσεων. Ήταν ένα απαραίτητο βήμα στην εξέλιξη της Λογικής σε αυτόνομη επιστήμη στον αιώνα μας.

37

Βιβλιογραφία

1. Η Θεωρία των απείρων αριθμών : Χρίστου Γκλαβά
2. Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων : Κορνηλίας Κάλφα
3. Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία : Γιάννη Μοσχοβάκη
4. Πραγματική Ανάλυση : Πολυχρόνη Ξενικάκη
5. Απειροστικός Λογισμός : Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας
6. Τα Μαθηματικά στο Δυτικό πολιτισμό : Morris Kline
7. Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών : HOWARD EVES
8. Η Μαθηματική εμπειρία : P.J. DAVIS - R. HERSH
9. Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών : Διονύσης Αναπολιτάνος.
10. Επιστημολογία των Μαθηματικών : Γιώργος Ρουσόπουλος
11. Τα θεμέλια της Αριθμητικής : Γκότλομπ Φρέγκε
12. Το άπειρο : Γιώργος Πράσινος
13. Καθολική Άλγεβρα : Σ. ΖΕΡΒΟΣ
14. Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής : Αθ. Τσουβάρας