ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΙ

Συλλογισμός είναι μια συνεπαγωγή της μορφής $A \wedge B \rightarrow \Gamma$, όπου οι προκείμενες A, B και το συμπέρασμα Γ είναι προτάσεις κατηγορικές, δηλαδή ανήκουν σε κάποια απο τις παρακάτω μορφές:

α: (Γενικές καταφατικές): όλα τα S είναι P, SaP συμβολικά, ή $(\forall x)(S_x \rightarrow P_x)$ στην γλώσσα της λογικής ή $S \subset P$ στην γλώσσα της θεωρίας Συνόλων.

ί: (Μερικές καταφατικές): κάποια S είναι P, συμβολικά SiP ή $(\exists x)(S_x \wedge P_x)$ ή $S \cap P \neq \varnothing$ ή $S \not\subset P'$

e: (Γενικές αποφατικές): κανένα S δεν είναι P, συμβολικά SeP ή $(\forall x)(S_x \rightarrow \neg P_x)$ ή $S \cap P = \varnothing$ ή $S \subset P'$

o: (Μερικές αποφατικές): Κάποια S δεν είναι P, συμβολικά SoP ή $(\exists x)(S_x \wedge \neg P_x)$ ή $S \cap \overline{P} \neq \varnothing$ ή $S \not\subset P$

Συχνά στην πράξη, τον συλλογισμό $A \wedge B \rightarrow \Gamma$, τον γράφουμε σύμφωνα με την διάταξη:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \Gamma \end{array}$$

<u>παράδειγμα</u>: A : Ολοι οι άνθρωποι είναι θνητοί (α)
B : Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος (ί)
άρα Γ : Ο Σωκράτης είναι θνητός (ί)

Για την απαρίθμηση όλων των δυνατών μορφών συλλογισμού έχει επικρατήσει κάποια συγκεκριμένη ονοματολογία.

Απο τους τρείς εμπλεκόμενους όρους, το κατηγόρημα του συμπεράσματος καλείται <u>μείζων</u> όρος, το υποκείμενο της συνεπαγωγής καλείται <u>ελλάσων</u> όρος του συλλογισμού. Ο τρίτος όρος καλείται <u>μέσος</u> όρος. Τότε η προκείμενη που περιέχει τον μείζονα όρο λέγεται <u>μείζων προκείμενη</u>, ενώ εκείνη που περιέχει τον ελάσσονα όρο λέγεται <u>ελλάσων προκείμενη</u>

Στο παραπάνω παράδειγμα ο μείζων όρος P είναι το "θνητός", ο ελάσσων όρος S είναι "Σωκράτης" και ο μέσος όρος M είναι ο "άνθρωπος".
Έτσι ο συλλογισμός έχει τη μορφή

A : M α P
B : S i M
Γ : S i P

Έχει επικρατήσει η συνήθεια στα συλλογιστικά σχήματα, να γράφεται πρώτη η μείζων προκείμενη, οπότε με βάση αυτό το στοιχείο, για μια πλήρη περιγραφή των μορφών συλλογισμού, αρκεί να γνωρίζουμε την κατανομή του μέσου όρου ανάμεσα στις δύο προκείμενες.
Αυτό μπορεί να γίνει με τέσσερις τρόπους, που αντιστοιχούν στα παρακάτω σχήματα συλλογισμού

①	②	③	④
M P	P M	M P	P M
S M	S M	M S	M S
S P	S P	S P	S P

Τώρα π.χ. μια μορφή συλλογισμού τύπου ① γενικά είναι της μορφής

M □ P
S □ M
S □ P

όπου το □ μπορεί να αντικατασταθεί με κάποιο από τα (α, e, i, o). Συνεπώς υπάρχουν $4^3 = 64$ δυνατές μορφές συλλογισμού τύπου ①, και το ίδιο μπορεί να επιτευχθεί και για τα υπόλοιπα σχήματα.
Υπάρχουν λοιπόν $4^3 \cdot 4 = 4^4 = 256$ συλλογιστικές μορφές.
Απ' όλες αυτές τις μορφές, όπως ήδη έδειξε ο Αριστοτέλης και ο μαθητής του Θεόφραστος υπάρχουν μόνο 15 λογικά έγκυρες μορφές συλλογισμού. (Λογικά έγκυρες σημαίνει ότι ισχύουν κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία των P, S, M κρατώντας όμως σταθερή την ερμηνεία των λογικών συνδέσμων και ποσοδεικτών)

2

Οι λογικοί του Μεσαίωνα, για να βοηθήσουν την μνήμη των σπουδαστών, χρησιμοποιούσαν μνημοτεχνικές λέξεις που η καθεμιά τους συμβολίζει και ένα συνδυασμό. Το πρώτο φωνήεν της κάθε λέξης αντιπροσωπεύει το κατά ποιόν και ποσόν είδος της πρώτης προκείμενης (α, ι, e, ο). Το δεύτερο φωνήεν, το είδος της δεύτερης προκείμενης και το τρίτο φωνήεν του συμπεράσματος.

Έτσι οι 15 έγκυρες μορφές συλλογισμού (χρησιμοποιώντας ελληνικά γράμματα) είναι οι εξής:

1ο σχήμα

γράμματα (ααα)
έγραψε (eαe)
γραφίδι (αιι)
τεχνικός (eιο)

2ο σχήμα

έγραγε (eαe)
κάτεχε (αee)
μέτριον (eιο)
άχολον (αοο)

3ο σχήμα

ισάκις (ιαι)
ασπίδι (αιι)
ομαλός (οαο)
φέριστος (eιο)

4ο σχήμα

πάρεχε (αee)
ισάκις (ιαι)
σέλινον (eιο)

έτσι για παράδειγμα οι συλλογισμοί

$$\begin{array}{c} M\ e\ P \\ \underline{S\ a\ M} \\ S\ e\ P \end{array} \qquad \begin{array}{c} M\ i\ P \\ \underline{M\ a\ S} \\ S\ i\ P \end{array}$$

είναι έγκυροι

ενώ οι συλλογισμοί

$$\begin{array}{c} M\ e\ P \\ \underline{S\ e\ M} \\ S\ e\ P \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\ a\ M \\ \underline{S\ a\ M} \\ S\ o\ P \end{array}$$

δεν είναι έγκυροι.

3

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι από τους έγκυρους συλλογισμούς

$$\begin{array}{c} M \alpha P \\ \underline{S \alpha M} \\ S \alpha P \end{array} \qquad \begin{array}{c} P e M \\ \underline{S i M} \\ S o P \end{array}$$

μπορούν να παραχθούν όλοι οι υπόλοιποι.

- Ξεκινάμε με την εξής βασική παρατήρηση

$$\begin{array}{c} A \\ \underline{B} \\ \Gamma \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} B \\ \underline{A} \\ \Gamma \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} A \\ \underline{\sim \Gamma} \\ \sim B \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \sim \Gamma \\ \underline{B} \\ \sim A \end{array}$$

- Από τους ορισμούς που δώσαμε, προφανώς προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\sim S \alpha P \leftrightarrow S o P \quad (1)$$
$$\sim S i P \leftrightarrow S e P \quad (2)$$
$$S e P \leftrightarrow P e S \quad (3)$$
$$S i P \leftrightarrow P i S \quad (4)$$

επίσης ισχύουν

$$M \alpha P \wedge S \alpha M \rightarrow S \alpha P \quad (5)$$
$$P e M \wedge S i M \rightarrow S o P \quad (6)$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, με βάση τις προτάσεις (1) - (6) μπορούμε να παράγουμε όλες τις μορφές συλλογισμού εντελώς τυπικά, δηλαδή δίχως αναφορά στη σημασία των προτάσεων που εμπλέκονται.
Για το λόγο αυτό τις προτάσεις (1) - (6) θα τις αποκαλούμε και "αξιώματα των συλλογισμών"

- Αν $A \wedge B \rightarrow \Gamma$ και $A \leftrightarrow \Delta$, τότε $\Delta \wedge B \rightarrow \Gamma$

- $\begin{array}{c} PeM \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MeP \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{I}(eio)$

  επίσης

- $\mathrm{II}(eio) \Leftrightarrow \begin{array}{c} PeM \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MeP \\ MiS \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{III}(eio)$

- $\mathrm{II}(eio) \Leftrightarrow \begin{array}{c} PeM \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} PeM \\ MiS \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{IV}(eio)$

- $\mathrm{II}(eio) \Leftrightarrow \begin{array}{c} PeM \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \sim SoP \\ SiM \\ \hline \sim PeM \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} SaP \\ SiM \\ \hline PiM \end{array}$

βασική μέθοδος

τώρα ας προσέξουμε ότι το τελευταίο σχήμα, είναι μια μορφή συλλογισμού της τρίτης κατηγορίας, όπου ο μέσος είναι ο S. Μετονομάζοντας λοιπόν τους όρους, με τον κλασικό συμβολισμό θα έχουμε την μορφή

$$\begin{array}{c} MaP \\ MiS \\ \hline PiS \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MaP \\ MiS \\ \hline SiP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{III}(aii)$$

- $\mathrm{II}(eio) \Leftrightarrow \begin{array}{c} PeM \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} PeM \\ \sim SoP \\ \hline \sim SiM \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} PeM \\ SaP \\ \hline SeM \end{array} \overset{\mu}{\Rightarrow} \begin{array}{c} MeP \\ SaM \\ \hline SeP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{I}(eae)$

- $\mathrm{II}(eio) \Leftrightarrow \mathrm{III}(eio) \Leftrightarrow \begin{array}{c} MeP \\ MiS \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MeP \\ \sim SoP \\ \hline \sim MiS \end{array} \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} MeP \\ SaP \\ \hline MeS \end{array} \overset{\mu}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} PeM \\ SaM \\ \hline PeS \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} PeM \\ SaM \\ \hline SeP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{II}(eae)$$

• $II(eio) \Leftrightarrow III(eio) \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}MeP\\ MiS\end{array}}{SoP} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}\sim SoP\\ MiS\end{array}}{\sim MeP}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}SaP\\ MiS\end{array}}{MiP} \overset{\mu}{\Leftrightarrow} \dfrac{\begin{array}{c}MaP\\ SiM\end{array}}{SiP} \Leftrightarrow I(aii)$

• $I(aaa) \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}MaP\\ SaM\end{array}}{SaP} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}\sim SaP\\ SaM\end{array}}{\sim MaP} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}SoP\\ SaM\end{array}}{MoP} \overset{\mu}{\Leftrightarrow}$

$\dfrac{\begin{array}{c}MoP\\ MaS\end{array}}{SoP} \Leftrightarrow III(oao)$

• $I(aaa) \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}MaP\\ SaM\end{array}}{SaP} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}MaP\\ \sim SaP\end{array}}{\sim SaM} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}MaP\\ SoP\end{array}}{SoM} \overset{(\mu)}{\Leftrightarrow}$

$\dfrac{\begin{array}{c}PaM\\ SoM\end{array}}{SoP} \Leftrightarrow II(aoo)$

βασική μέθοδος

• $III(eio) \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}PeM\\ SiM\end{array}}{SoP} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}SiM\\ PeM\end{array}}{SoP} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}SiM\\ \sim SoP\end{array}}{\sim PeM} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\begin{array}{c}SiM\\ SaP\end{array}}{PiM} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}SiM\\ SaP\end{array}}{PiM} \overset{\mu}{\Leftrightarrow} \dfrac{\begin{array}{c}MiS\\ MaP\end{array}}{PiS} \Leftrightarrow \dfrac{\begin{array}{c}MiP\\ MaS\end{array}}{SiP} \Leftrightarrow III(iai)$

6

• $$\mathrm{II}(eio) \Leftrightarrow \begin{array}{c} PeM \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} SiM \\ PeM \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \sim SoP \\ PeM \\ \hline \sim SiM \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} S\alpha P \\ PeM \\ \hline SeM \end{array} \overset{h}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} S\alpha M \\ MeP \\ \hline SeP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} S\alpha M \\ MeP \\ \hline PeS \end{array} \overset{h}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{array}{c} P\alpha M \\ MeS \\ \hline SeP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{IV}(\alpha ee)$$

• $$\mathrm{II}(eio) \Leftrightarrow \mathrm{IV}(\alpha ee) \Leftrightarrow \begin{array}{c} P\alpha M \\ MeS \\ \hline SeP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} P\alpha M \\ SeM \\ \hline SeP \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{II}(\alpha ee)$$

• $$\mathrm{II}(eio) \Leftrightarrow \mathrm{III}(i\alpha i) \Leftrightarrow \begin{array}{c} MiP \\ M\alpha S \\ \hline SiP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} PiM \\ M\alpha S \\ \hline SiP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{IV}(i\alpha i)$$

7

Δράσεις πάνω σε ένα συλλογιστικό σχήμα

Έστω ότι έχουμε ένα συλλογιστικό σχήμα
π.χ. $\dfrac{\begin{array}{c} M\alpha P \\ MiS \end{array}}{SeP}$ απ' αυτό μπορούμε να πάρουμε ένα ισοδύναμο συλλογιστικό σχήμα ως εξής:

Αντικαθιστούμε μια προκείμενη και το συμπέρασμα με την ισοδύναμη άρνηση (θυμηθείτε ότι $M\alpha P \leftrightarrow \sim MoP$ και $MeP \leftrightarrow \sim MiP$) — Άρνηση

και κατόπιν εφαρμόσαμε τη λογική αρχή

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{\Gamma} \iff \dfrac{\begin{array}{c} \sim\Gamma \\ B \end{array}}{\sim A} \iff \dfrac{\begin{array}{c} A \\ \sim\Gamma \end{array}}{\sim B}$$

Έτσι για το παραπάνω σχήμα έχουμε

$$\dfrac{\begin{array}{c} M\alpha P \\ MiS \end{array}}{SeP} \iff \dfrac{\begin{array}{c} \sim MoP \\ MiS \end{array}}{\sim SiP} \iff \dfrac{\begin{array}{c} SiP \\ MiS \end{array}}{MoP}$$

Μετονομασία κανονικοποίησης — Παρατηρώντας το τελευταίο σχήμα, μπορούμε να αναγνωρίσουμε ότι είναι συλλογισμός της μορφής I, όπου το ρόλο του μέσου τον έχει το S και το ρόλο του ελλάσσονος όρου τον έχει το M. Κάνοντας λοιπόν μια μετονομασία που εναλλάσσει τα S και M, έρχεται το τελευταίο σχήμα στην κανονική του μορφή. $\dfrac{\begin{array}{c} MiP \\ SiM \end{array}}{SoP}$

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω στο συλλογισμό

$$\dfrac{\begin{array}{c} PiM \\ M\alpha S \end{array}}{SoP} \iff \dfrac{\begin{array}{c} PiM \\ \sim MoS \end{array}}{\sim S\alpha P} \iff \dfrac{\begin{array}{c} PiM \\ S\alpha P \end{array}}{MoS} \overset{\mu}{\iff} \dfrac{\begin{array}{c} MiP \\ S\alpha M \end{array}}{PoS}$$

στην τελευταία μορφή το συμπέρασμα δεν έχει την κλασική μορφή για αυτό το λόγο προχωράμε στην κανονικοποίηση ως εξής: Αλλάζουμε τη σειρά των προκειμένων $\dfrac{\begin{array}{c} S\alpha M \\ MiP \end{array}}{PoS}$ και μετονομάζουμε τα S και P $\dfrac{\begin{array}{c} P\alpha M \\ MiS \end{array}}{SoP}$

Την διαδικασία που σε κάθε σχήμα συλλογισμού αντιστοιχούμε ένα άλλο ισοδύναμό του, σύμφωνα με τις παραπάνω ενέργειες (άρνηση - μετονομασία κανονικοποίηση) την ονομάζουμε δράση F. Ανάλογα σε ποια προκείμενη γίνεται η άρνηση διακρίνουμε δυο κατηγορίες δράσης την F_1 με άρνηση στην πρώτη προκείμενη και την F_2 με άρνηση στην δεύτερη προκείμενη.

Αν Σ είναι ο συλλογισμός τότε $F(\Sigma)$ είναι το αποτέλεσμα της δράσης F πάνω στον Σ.
Επίσης αν $F(\Sigma)=\Sigma'$, θα γράφουμε και $\Sigma \xrightarrow{F} \Sigma'$

- Κάθε δράση, μπορούμε να την χωρίσουμε σε δυο υποκατηγορίες, ανάλογα με το αν μετά την πρώτη μετονομασία το συμπέρασμα είναι στην κανονική του μορφή S P, οπότε μιλάμε για δράσεις F_1, F_2 ή αν το συμπέρασμα είναι στη μορφή P S όπου εναλλάσουμε τις θέσεις μείζονος και ελάσσονος προκείμενης και μετονομάζουμε τα S, P και μιλάμε για δράσεις τύπου F_1' και F_2'.
Οι επιτρεπτές δράσεις και τα αποτελέσματά τους πάνω σ' ένα συλλογιστικό σχήμα, φαίνονται παρακάτω:

$$I_{xy\omega} \xrightarrow{F_1} III_{\bar{\omega}y\bar{x}} \qquad I_{xy\omega} \xrightarrow{F_2} II_{x\bar{\omega}\bar{y}}$$

$$II_{xy\omega} \xrightarrow{F_1'} III_{y\bar{\omega}\bar{x}} \qquad II_{xy\omega} \xrightarrow{F_2} I_{x\bar{\omega}\bar{y}}$$

$$III_{xy\omega} \xrightarrow{F_1} I_{\bar{\omega}y\bar{x}} \qquad III_{xy\omega} \xrightarrow{F_2'} II_{\bar{\omega}x\bar{y}}$$

$$IV_{xy\omega} \xrightarrow{F_1'} IV_{y\bar{\omega}\bar{x}} \qquad IV_{xy\omega} \xrightarrow{F_2'} IV_{\bar{\omega}x\bar{y}}$$

όπου $x, y, \omega \in \{e, i, o, a\}$ και $\bar{a}=o$, $\bar{o}=a$, $\bar{e}=i$, $\bar{i}=e$

Την διαδικασία που σε κάθε σχήμα συλλογισμού αντιστοιχούμε ένα άλλο ισοδύναμό του, σύμφωνα με τις παραπάνω ενέργειες (άρνηση - μετονομασία κανονικο την ονομάζουμε <u>δράση</u> F. Ανάλογα σε ποια προκείμενη γίνεται η άρνηση διακρίνουμε δυο κατηγορίες δράσης την F_1 με άρνηση στην πρώτη προκείμενη και την F με άρνηση στην δεύτερη προκείμενη.

Αν Σ είναι ο συλλογισμός τότε $F(\Sigma)$ είναι το αποτέλεσμα της δράσης F πάνω στον Σ.
Επίσης αν $F(\Sigma) = \Sigma'$, θα γράφουμε και $\Sigma \xrightarrow{F} \Sigma'$

- Κάθε δράση, μπορούμε να την χωρίσουμε σε δυο υποκατηγορίες, ανάλογα με το αν μετά την πρώτη μετονομασία το συμπέρασμα είναι στην κανονική του μορφή S P, οπότε μιλάμε για δράσεις F_1, F_2 ή αν το συμπέρασμα είναι στη μορφή P S, όπου εναλλάσουμε τις θέσεις μείζονος και ελάσσονος προκείμενης και μετονομάζουμε τα S, P και μιλάμε για δράσεις τύπου F_1' και F_2'.

Οι επιτρεπτές δράσεις και τα αποτελέσματά τους πάνω σ' ένα συλλογιστικό σχήμα, φαίνονται παρακάτω:

$$I_{xyw} \xrightarrow{F_1} III_{\bar{w} y \bar{x}} \qquad I_{xyw} \xrightarrow{F_2} II_{x \bar{w} \bar{y}}$$

$$II_{xyw} \xrightarrow{F_1'} III_{y \bar{w} \bar{x}} \qquad II_{xyw} \xrightarrow{F_2} I_{x \bar{w} \bar{y}}$$

$$III_{xyw} \xrightarrow{F_1} I_{\bar{w} y \bar{x}} \qquad III_{xyw} \xrightarrow{F_2'} II_{\bar{w} x \bar{y}}$$

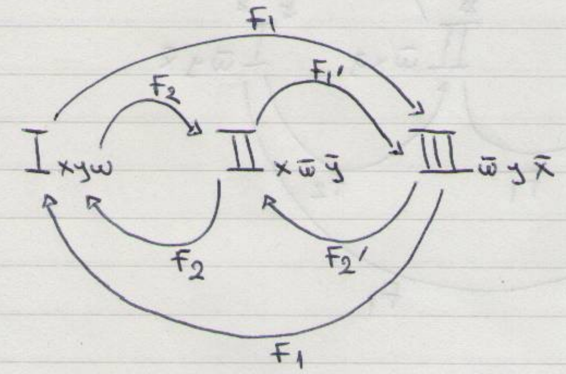
$$IV_{xyw} \xrightarrow{F_1'} IV_{y \bar{w} \bar{x}} \qquad IV_{xyw} \xrightarrow{F_2'} IV_{\bar{w} x \bar{y}}$$

όπου $x, y, w \in \{e, i, o, a\}$ και $\bar{a} = o$, $\bar{o} = a$, $\bar{e} = i$, $\bar{i} = e$

Διαδοχικές δράσεις πάνω σ' ένα συλλογιστικό σχήμα.

Μορφή I

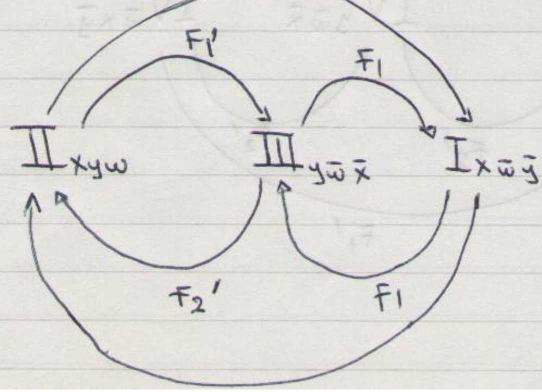
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}\,xy\omega \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "F_2"] & \mathrm{III}\,\bar{\omega} y \bar{x} \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "F_2'"] & \mathrm{I}\,xy\omega \\
\mathrm{II}\,x\bar{\omega}\bar{y} & \mathrm{II}\,x\bar{\omega}\bar{y} \arrow[r, "F_1'"] \arrow[d, "F_2"] & \mathrm{III}\,\bar{\omega} y \bar{x} \\
 & \mathrm{I}\,xy\omega &
\end{tikzcd}$$



Μορφή II

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{II}\,xy\omega \arrow[r, "F_1'"] \arrow[d, "F_2"] & \mathrm{III}\,y\bar{\omega}\bar{x} \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "F_2'"] & \mathrm{I}\,x\bar{\omega}\bar{y} \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "F_2"] & \mathrm{III}\,y\bar{\omega}\bar{x} \\
\mathrm{I}\,x\bar{\omega}\bar{y} & \mathrm{II}\,xy\omega & \mathrm{II}\,xy\omega &
\end{tikzcd}$$

Συνοπτικά έχουμε το διάγραμμα:



Λόγω των σχέσεων $MeP \leftrightarrow PeM$, $MiP \leftrightarrow PiM$, (*), όταν μια τουλάχιστον από τις προκείμενες ενός συλλογισμού περιέχουν τα σύμβολα e ή i, μπορούμε να πάρουμε ένα ισοδύναμο συλλογισμό

π.χ. από
$$\frac{\begin{matrix} MeP \\ SaM \end{matrix}}{SeP}$$
παράγεται το
$$\frac{\begin{matrix} PeM \\ SaM \end{matrix}}{SeP}$$

Γράφουμε
$$\frac{\begin{matrix} MeP \\ SaM \end{matrix}}{SeP} \xleftrightarrow{A_1} \frac{\begin{matrix} PeM \\ SaM \end{matrix}}{SeP}$$
ή $\mathrm{I}eae \xleftrightarrow{A_1} \mathrm{II}eae$

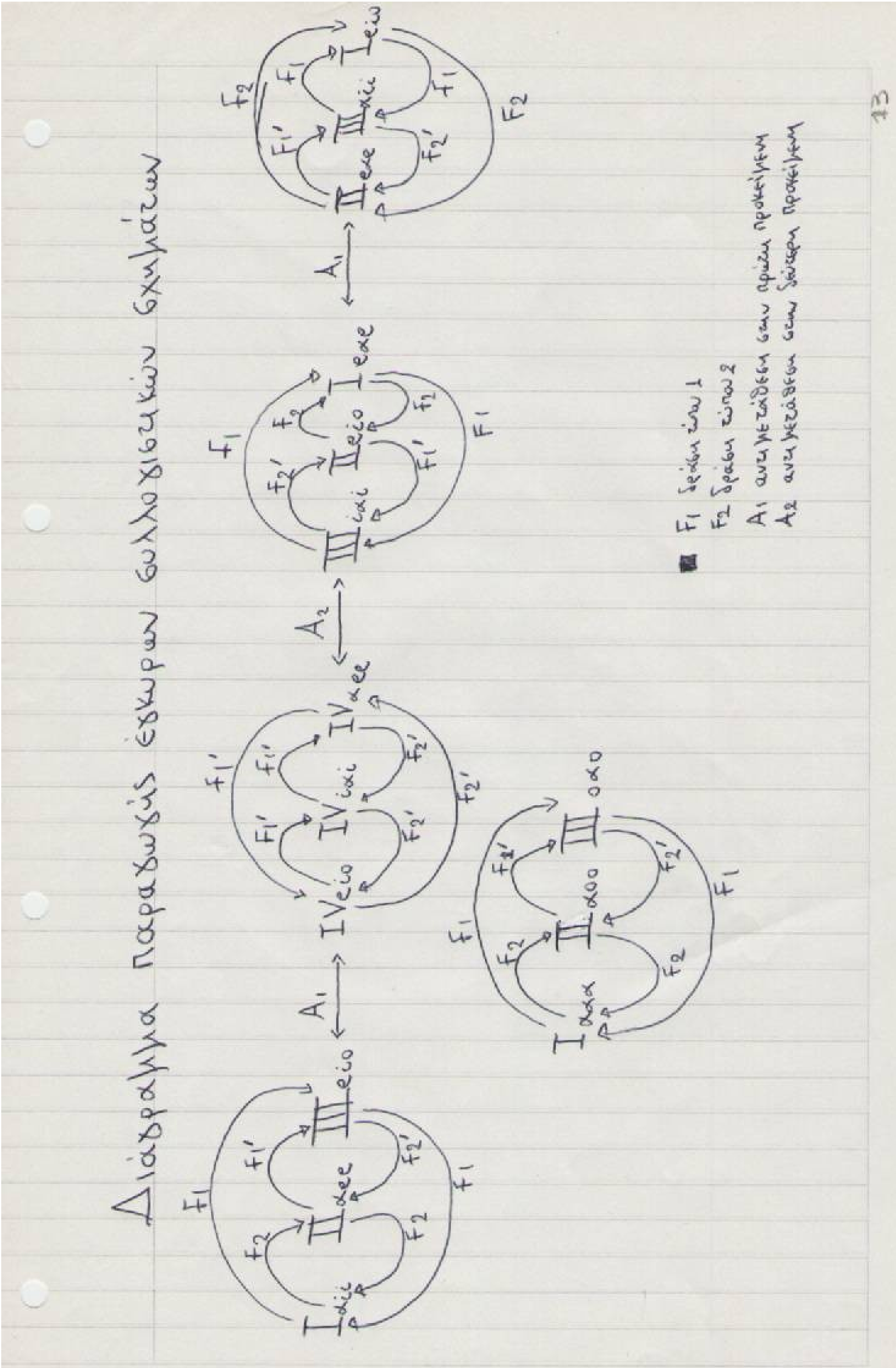
όπου A_1 σημαίνει ότι κάναμε χρήση της (*) στην πρώτη προκείμενη.

Υπό την προϋπόθεση ότι οι προκείμενες περιέχουν κάποιο από τα e, i, έχουμε τις παρακάτω επιτρεπτές ισοδυναμίες:

$$\mathrm{I} \xleftrightarrow{A_1} \mathrm{II}, \quad \mathrm{I} \xleftrightarrow{A_2} \mathrm{III}, \quad \mathrm{II} \xleftrightarrow{A_2} \mathrm{IV}, \quad \mathrm{III} \xleftrightarrow{A_1} \mathrm{IV}$$

Αυτές οι σχέσεις μαζί με τον κατάλογο των δυνατών δράσεων (σελ. 9) αρκούν για μια πλήρη, τυπική (συντακτική) παραγωγή όλων των έγκυρων μορφών συλλογισμού, όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα.

Μια αποτελεσματική μέθοδος ελέγχου της εγκυρότητας ενός συλλογισμού (Σ) είναι η εξής:
Δρούμε πάνω στο Σ παράγοντας όλα τα δυνατά αποτελέσματα. Είδαμε ότι αυτά είναι ακριβώς τρία σε πλήθος, έστω $\{\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2\}$. Αν κάποιο από τα $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ είναι της μορφής $\mathrm{I}aaa$ ή eio σε κάποια μορφή, τότε ο Σ είναι έγκυρος, διαφορετικά είναι μη έγκυρος.


Διάγραμμα παραγωγής έγκυρων συλλογιστικών σχημάτων
F1 δράση τύπου 1
F2 δράση τύπου 2
A1 αντιμετάθεση των πρώτων προκείμενων
A2 αντιμετάθεση των δεύτερων προκείμενων
13

Ασκήσεις εμπέδωσης στις δράσεις

Έστω $\Sigma = \begin{array}{c} P\,i\,M \\ M\,\alpha\,S \\ \hline S\,o\,P \end{array}$

$$F_1'(\Sigma): \begin{array}{c} \sim P\,e\,M \\ M\,\alpha\,S \\ \hline \sim S\,\alpha\,P \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} S\,\alpha\,P \\ M\,\alpha\,S \\ \hline P\,e\,M \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} M\,\alpha\,P \\ S\,\alpha\,M \\ \hline P\,e\,S \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} S\,\alpha\,M \\ M\,\alpha\,P \\ \hline P\,e\,S \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} P\,\alpha\,M \\ M\,\alpha\,S \\ \hline S\,e\,P \end{array}$$

$$F_2'F_1'(\Sigma): \begin{array}{c} P\,\alpha\,M \\ \sim M\,o\,S \\ \hline \sim S\,i\,P \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} P\,\alpha\,M \\ S\,i\,P \\ \hline M\,o\,S \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} M\,\alpha\,P \\ S\,i\,M \\ \hline P\,o\,S \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} S\,i\,M \\ M\,\alpha\,P \\ \hline P\,o\,S \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} P\,i\,M \\ M\,\alpha\,S \\ \hline S\,o\,P \end{array} \text{ άρα } F_2'F_1'(\Sigma) = \begin{array}{c} P\,i\,M \\ M\,\alpha\,S \\ \hline S\,o\,P \end{array}$$

$$F_2'(\Sigma): \begin{array}{c} P\,i\,M \\ \sim M\,o\,S \\ \hline \sim S\,\alpha\,P \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} P\,i\,M \\ S\,\alpha\,P \\ \hline M\,o\,S \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} M\,\alpha\,P \\ S\,\alpha\,M \\ \hline P\,o\,S \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} S\,\alpha\,M \\ M\,i\,P \\ \hline P\,o\,S \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} P\,\alpha\,M \\ M\,i\,S \\ \hline S\,o\,P \end{array} \text{ άρα } F_1'F_2'(\Sigma) = \begin{array}{c} P\,\alpha\,M \\ M\,i\,S \\ \hline S\,o\,P \end{array}$$

Συμπ. $F_1'F_2' \neq F_2'F_1'$

Θα εξετάσουμε τώρα την αντιμετάθεση των δράσεων F_1, F_2 πάνω στα αξιώματα (5), (6) δηλαδή στα συλλογιστικά σχήματα $I(\alpha\alpha\alpha)$ και $II(e\iota o)$

$$I(\alpha\alpha\alpha) \iff \begin{array}{c} M\alpha P \\ S\alpha M \\ \hline S\alpha P \end{array} \iff \begin{array}{c} \sim M o P \\ S\alpha M \\ \hline \sim S o P \end{array} \iff \begin{array}{c} S o P \\ S\alpha M \\ \hline M o P \end{array} \iff \begin{array}{c} M o P \\ M\alpha S \\ \hline S o P \end{array} \iff$$

$III\, o\alpha o$

$$\begin{array}{c} M o P \\ \sim M o S \\ \hline \sim S\alpha P \end{array} \iff \begin{array}{c} M o P \\ S\alpha P \\ \hline M o S \end{array} \iff \begin{array}{c} P o M \\ S\alpha M \\ \hline P o S \end{array} \iff \begin{array}{c} S\alpha M \\ P o M \\ \hline P o S \end{array} \iff \begin{array}{c} P\alpha M \\ S o M \\ \hline S o P \end{array}$$

δηλ. $F_2F_1(I\alpha\alpha\alpha) = II\,\alpha o o$ $\quad F_1(I\alpha\alpha\alpha) = III\, o\alpha o$

$$I\alpha\alpha\alpha \iff \begin{array}{c} M\alpha P \\ S\alpha M \\ \hline S\alpha P \end{array} \iff \begin{array}{c} M\alpha P \\ \sim S o M \\ \hline \sim S o P \end{array} \iff \begin{array}{c} M\alpha P \\ S o P \\ \hline S o M \end{array} \iff \begin{array}{c} P\alpha M \\ S o M \\ \hline S o P \end{array} \iff II\,\alpha o o$$

$$\begin{array}{c} \sim P o M \\ S o M \\ \hline \sim S\alpha P \end{array} \iff \begin{array}{c} S\alpha P \\ S o M \\ \hline P o M \end{array} \iff \begin{array}{c} M\alpha P \\ M o S \\ \hline P o S \end{array} \iff \begin{array}{c} M o S \\ M\alpha P \\ \hline P o S \end{array} \iff \begin{array}{c} M o P \\ M\alpha S \\ \hline S o P \end{array}$$

δηλ. $F_1F_2(I\alpha\alpha\alpha) = III\,o\alpha o = F_1(I\alpha\alpha\alpha)$

και $F_2F_1(I\alpha\alpha\alpha) = II\,\alpha o o = F_2(I\alpha\alpha\alpha)$

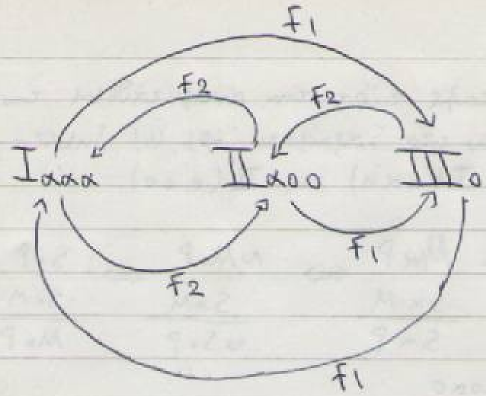
άρα $F_2F_1F_2(I\alpha\alpha\alpha) = F_2F_1(I\alpha\alpha\alpha) = F_2(I\alpha\alpha\alpha)$

$F_1F_2F_1(I\alpha\alpha\alpha) = F_1F_2(I\alpha\alpha\alpha) = F_1(I\alpha\alpha\alpha)$

Συμπεραίνουμε ότι δρώντας διαδοχικά πάνω στο $I\alpha\alpha\alpha$ τα μόνα δυνατά αποτελέσματα είναι τα εξής 3 $I\alpha\alpha\alpha$, $II\,\alpha o o$, $III\,o\alpha o$

- $II\,\alpha o o \xrightarrow{F_1} III\,o\alpha o \xrightarrow{F_2} II\,\alpha o o \xrightarrow{F_1}$
- I

$$\begin{tikzcd} I\alpha\alpha\alpha \arrow[r, leftrightarrow, "F_1"] \arrow[d, leftrightarrow, "F_2"'] & III\,o\alpha o \arrow[r, "F_2"] & II\,\alpha o o \arrow[ll, bend right, "F_2"'] \\ II\,\alpha o o \arrow[ur, "F_1"'] & & \end{tikzcd}$$


f1
f2
f2
Iααα
IIαοο
IIIοαο
f1
f2
f1

$$\mathrm{III}\,eio \Leftrightarrow \begin{array}{c} MeP \\ MiS \\ \hline SoP \end{array} \overset{F_1}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} \sim MiP \\ MiS \\ \hline \sim SaP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} SaP \\ MiS \\ \hline MiP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MaP \\ SiM \\ \hline SiP \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{I}\,\alpha ii \overset{F_2}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} MaP \\ \sim SeM \\ \hline \sim SeP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MaP \\ SeP \\ \hline SeM \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} PaM \\ SeM \\ \hline SeP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{II}\,\alpha ee$$

- Συλ. $F_1(\mathrm{III}\,eio) = \mathrm{I}\,\alpha ii \qquad F_2F_1(\mathrm{II}\,eio) = \mathrm{II}\,\alpha ee$

$$\mathrm{III}\,eio \Leftrightarrow \begin{array}{c} MeP \\ MiS \\ \hline SoP \end{array} \overset{F_2}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} MeP \\ \sim MeS \\ \hline \sim SaP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MeP \\ SaP \\ \hline MeS \end{array} \overset{r}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} PeM \\ SaM \\ \hline PeS \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} SaM \\ PeM \\ \hline PeS \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} PaM \\ SeM \\ \hline SeP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{II}\,\alpha ee$$

$$\mathrm{II}\,\alpha ee \overset{F_1}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} \sim PoM \\ SeM \\ \hline \sim SiP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} SiP \\ SeM \\ \hline PoM \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MiP \\ MeS \\ \hline PoS \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MeS \\ MiP \\ \hline PoS \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} MeP \\ MiS \\ \hline SoP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{III}\,eio$$

Συλ. $F_2(\mathrm{III}\,eio) = \mathrm{II}\,\alpha ee$

$F_1F_2(\mathrm{III}\,eio) = \mathrm{III}\,eio$

$$\mathrm{II}\,\alpha ee \overset{F_1}{\longleftrightarrow} \mathrm{III}\,eio \overset{F_2}{\longleftrightarrow} \mathrm{II}\,\alpha ee$$

$$\mathrm{I}\,\alpha ii \overset{F_1}{\longleftrightarrow} \mathrm{III}\,eio \overset{F_2}{\longleftrightarrow} \mathrm{II}\,\alpha ee$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{III}\,eio \arrow[rr, bend left=60, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] & \mathrm{II}\,\alpha ee \arrow[l, bend right, "F_1"'] \arrow[r, bend right, "F_2"'] & \mathrm{I}\,\alpha ii \arrow[l, bend right, "F_2"'] \arrow[ll, bend left=60, "F_1"]
\end{tikzcd}$$

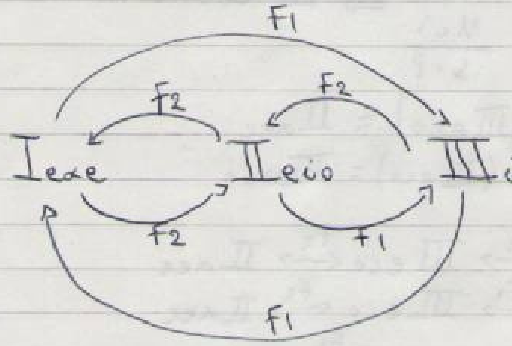
$$\mathrm{II}_{eio} \xrightarrow{f_1} \begin{array}{c} PeM \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \quad \begin{array}{c} \sim PiM \\ SiM \\ \hline \sim SaP \end{array} \quad \begin{array}{c} SaP \\ SiM \\ \hline PiM \end{array} \quad \begin{array}{c} MaP \\ MiS \\ \hline PiS \end{array}$$

$$\begin{array}{c} MiP \\ MaS \\ \hline SiP \end{array} \qquad \mathrm{III}_{iai} \xrightarrow{f_2} \begin{array}{c} MiP \\ \sim MoS \\ \hline \sim SeP \end{array} \quad \begin{array}{c} MiP \\ SeP \\ \hline MoS \end{array} \quad \begin{array}{c} PiM \\ SeM \\ \hline PoS \end{array}$$

$$\begin{array}{c} PeM \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \quad \mathrm{II}_{eio}$$

$$\mathrm{II}_{eio} \overset{f_2}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} PeM \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \quad \begin{array}{c} PeM \\ \sim SeM \\ \hline \sim SaP \end{array} \quad \begin{array}{c} PeM \\ SaP \\ \hline SeM \end{array} \quad \begin{array}{c} MeP \\ SaM \\ \hline SeP \end{array} \quad \mathrm{I}_{eae}$$

$$\mathrm{I}_{eae} \overset{f_1}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \sim MiP \\ SaM \\ \hline \sim SiP \end{array} \quad \begin{array}{c} SiP \\ SaM \\ \hline MiP \end{array} \quad \begin{array}{c} MiP \\ MaS \\ \hline SiP \end{array} \quad \mathrm{III}_{iai}$$



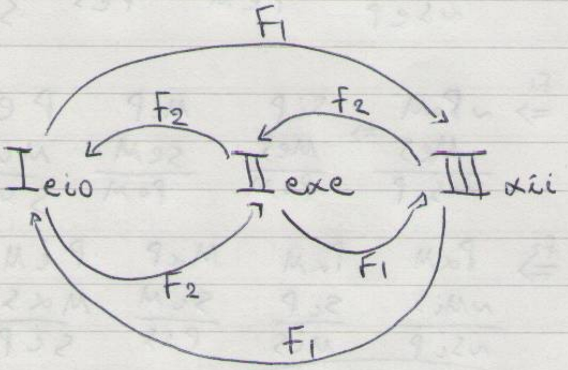
$$\mathrm{I}eio \Leftrightarrow \begin{array}{c} MeP \\ SiM \\ \hline SoP \end{array} \overset{F_1}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} \sim MiP \\ SiM \\ \hline \sim SaP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} SaP \\ SiM \\ \hline MiP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MaP \\ MiS \\ \hline SiP \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{III}aii \overset{F_2}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} MaP \\ \sim MeS \\ \hline \sim SeP \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} MaP \\ SeP \\ \hline MeS \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} PaM \\ SeM \\ \hline PeS \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} SeM \\ PaM \\ \hline PeS \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} PeM \\ SaM \\ \hline SeP \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{II}eae$$

$$\mathrm{I}eio \overset{F_2}{\Rightarrow} \begin{array}{c} MeP \\ \sim SeM \\ \hline \sim SaP \end{array} \vDash \begin{array}{c} MeP \\ SaP \\ \hline SeM \end{array} \quad \begin{array}{c} PeM \\ SaM \\ \hline SeP \end{array} \quad \mathrm{II}eae$$

$$\mathrm{II}eae \overset{F_1}{\Rightarrow} \begin{array}{c} \sim PiM \\ SaM \\ \hline \sim SiP \end{array} \quad \begin{array}{c} SiP \\ SaM \\ \hline PiM \end{array} \quad \begin{array}{c} MiP \\ MaS \\ \hline PiS \end{array} \quad \begin{array}{c} MaP \\ MiS \\ \hline SiP \end{array} \quad \mathrm{III}aii$$



$$IVeio \quad \frac{\begin{matrix}PeM\\MiS\end{matrix}}{SoP} \overset{f_1}{\Longrightarrow} \frac{\begin{matrix}\sim PiM\\MiS\end{matrix}}{\sim SaP} \quad \frac{\begin{matrix}SaP\\MiS\end{matrix}}{PiM}$$

$$\frac{\begin{matrix}MaP\\SiM\end{matrix}}{PiS} \quad \frac{\begin{matrix}PiM\\MaS\end{matrix}}{SiP} \quad IV\,iai \overset{f_2}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{\begin{matrix}PiM\\\sim MoS\end{matrix}}{\sim SeP} \quad \frac{\begin{matrix}PiM\\SeP\end{matrix}}{MoS} \quad \frac{\begin{matrix}MiP\\SeM\end{matrix}}{PoS} \quad \frac{\begin{matrix}SeM\\MiP\end{matrix}}{PoS} \quad \frac{\begin{matrix}PeM\\MiS\end{matrix}}{SoP} \quad IVeio$$

$$IVeio \overset{f_2}{\Longrightarrow} \frac{\begin{matrix}PeM\\\sim MeS\end{matrix}}{\sim SaP} \quad \frac{\begin{matrix}PeM\\SaP\end{matrix}}{MeS} \quad \frac{\begin{matrix}MeP\\SaM\end{matrix}}{PeS} \quad \frac{\begin{matrix}PaM\\MeS\end{matrix}}{SeP} \quad IVaee$$

$$IViai \overset{f_1}{\Longrightarrow} \frac{\begin{matrix}\sim PeM\\MaS\end{matrix}}{\sim SeP} \quad \frac{\begin{matrix}SeP\\MaS\end{matrix}}{PeM} \quad \frac{\begin{matrix}MeP\\SaM\end{matrix}}{PeS} \quad \frac{\begin{matrix}PaM\\MeS\end{matrix}}{SeP} \quad IVaee$$

$$IVaee \overset{f_1}{\Longrightarrow} \frac{\begin{matrix}\sim PoM\\MeS\end{matrix}}{\sim SiP} \Rightarrow \frac{\begin{matrix}SiP\\MeS\end{matrix}}{PoM} \quad \frac{\begin{matrix}MiP\\SeM\end{matrix}}{PoM} \quad \frac{\begin{matrix}PeM\\MiS\end{matrix}}{SoP} \quad IVeio$$

$$IVaee \overset{f_2}{\Longrightarrow} \frac{\begin{matrix}PaM\\\sim MiS\end{matrix}}{\sim SiP} \quad \frac{\begin{matrix}PaM\\SiP\end{matrix}}{MiS} \quad \frac{\begin{matrix}MaP\\SiM\end{matrix}}{PiS} \quad \frac{\begin{matrix}PiM\\MaS\end{matrix}}{SiP} \quad IViai$$

$$\begin{tikzcd}
IVeio \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[rr, bend right=60, "f_2"'] & IViai \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[l, bend left, "f_2"] & IVaee \arrow[l, bend left, "f_2"] \arrow[ll, bend right=60, "f_1"']
\end{tikzcd}$$

20