ΣΧΕΔΟΝ ΑΔΥΝΑΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Στόχος του παρακάτω άρθρου είναι να διερευνήσει το εξής ερώτημα:
Αν σ' έναν χώρο πιθανοτήτων, η πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου A είναι ίση με μηδέν ($P(A)=0$), τότε το A είναι αναγκαστικά το αδύνατο ενδεχόμενο;
Η απάντηση που θα δώσουμε και θα αιτιολογήσουμε είναι όχι.
Δηλαδή από την συνθήκη $P(A)=0$, δεν προκύπτει λογικά ότι $A=\varnothing$.

Πρώτα απ' όλα οποιαδήποτε συζήτηση περί πιθανότητας, επιβάλλει να ξεκαθαρίσουμε τι ακριβώς εννοούμε λέγοντας πιθανότητα του ενδεχομένου A, δηλαδή μέσα σε ποιό θεωρητικό πλαίσιο κινούνται οι έννοιες για τις οποίες θα μιλήσουμε.
Στο άρθρο αυτό θα αναφερθούμε σε δυο τέτοια πλαίσια θεωρίας. [Αν και υπάρχουν και άλλες προτεινόμενες θεωρίες για την πιθανότητα, ωστόσο αυτές που θα μελετήσουμε εκφράζουν αυτό που συνήθως εννοούμε όταν μιλάμε για πιθανότητες, λ.χ. στη διδακτική πράξη σε Λύκειο ή Πανεπιστήμιο]

Το τυχαίο πείραμα είναι μια βασική, αρχική έννοια για την Πιθανοθεωρία, για την οποία πολλές φορές λέγεται ότι είναι η μελέτη των μαθηματικών μοντέλων των τυχαίων φαινομένων (εμπειρικά τυχαία πειράματα).
Ένα παράδειγμα μαθηματικού μοντέλου, που γίνεται αμέσως κατανοητό είναι το Ευκλείδειο Γεωμετρικό μοντέλο για τον χώρο. Στο μοντέλο αυτό η εμπειρική έννοια του υλικού σημείου, αντιστοιχίζεται στο θεωρητικό σημείο, που δεν έχει καθόλου διαστάσεις. Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η μαθηματική έννοια "τετράγωνο" είναι μια αφαίρεση των υλικών, εμπειρικών τετραγώνων, χωρίς να έχει καμμιά ιδιαίτερη σχέση με κανένα από αυτά.

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Οι έννοιες της Πιθανότητας εισάγονται με τον ίδιο τρόπο που εισάγονται και οι γεωμετρικές έννοιες.

Ένα εμπειρικό φαινόμενο, λέγεται τυχαίο αν χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα, ότι η παρατήρησή του, κάτω από τις ίδιες πρακτικά συνθήκες, δεν οδηγεί στο ίδιο παρατηρούμενο αποτέλεσμα δηλαδή δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του.

Ένα απλό εμπειρικό φαινόμενο (ή και εμπειρικό τυχαίο πείραμα) είναι η ανάρριψη και η παρατήρηση της ένδειξης ενός νομίσματος.

Το αφηρημένο (ιδεατό) μαθηματικό "τυχαίο πείραμα" μπορεί να επαναληφθεί (εννοιολογικά) όσες φορές θέλουμε, κάτω ακριβώς από τις ίδιες συνθήκες. Μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι τα ιδεατά "τυχαία πειράματα" σχετίζονται με τα εμπειρικά τους αντίστοιχα, με τον ίδιο τρόπο που σχετίζεται το γεωμετρικό σημείο ή σχήμα με τα υλικά τους αντίστοιχα.

Στην Πιθανοθεωρία λοιπόν η έννοια "τυχαίο πείραμα" αναφέρεται σε μια ιδεατή διαδικασία παρατηρήσεως δεδομένων (μετρήσεων κ.λ.π.) και όχι στη διάταξη (όργανα κ.λ.π.) και στην εκτέλεση του πειράματος. Έτσι η "τυχαιότητα" αναφέρεται στα αποτελέσματα και όχι στην διαδικασία εκτέλεσης και το μηχανισμό του πειράματος.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι αναρρίπτουμε ένα νόμισμα. Τότε ο δειγματικός χώρος Ω (το σύνολο δηλαδή όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός ιδεατού τυχαίου πειράματος) μπορεί να δίνεται από:

(i) $\Omega = \{K, \Gamma\}$ αν θεωρούμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα είναι τα K="κεφαλή", Γ="γράμματα"

(ii) $\Omega = \{K, \Gamma, O\}$ αν θεωρούμε ότι το να σταθεί όρθιο το νόμισμα είναι ένα δυνατό αποτέλεσμα.

2

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

i) $\Omega \in F$

ii) Αν $A \in F$ τότε για το συμπλήρωμα του A ως προς Ω ισχύει $A' \in \Omega$

iii) Αν $A_1, A_2, \ldots \in F$, τότε $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in F$.

Δηλαδή F είναι πεδίο του Borel ή σ-άλγεβρα.

Εύκολα μπορούν να αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες:

α) $P(A) + P(A') = 1$

β) $0 \leq P(A) \leq 1$

γ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

δ) $P(\Omega) = 0$

ε) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

ζ) $P(\bigcup A_k) \leq \sum P(A_k)$

Ας έρθουμε τώρα στη διερεύνηση του ερωτήματος:

Αν $P(A) = 0$ τότε $A = \phi$;

Θα δείξουμε ότι δεν είναι αναγκαστικά $A = \phi$, εξετάζοντας ένα μοντέλο συγκεκριμένο, χώρου πιθανότητας.

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και F το δυναμοσύνολο του Ω, δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω. $(D(\Omega) = F)$

τότε

$$F = \{\phi, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση πιθανότητας ως εξής:

$P(\omega_1) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_2) = 0$, $P(\omega_3) = \frac{2}{3}$ και αν $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \omega_{k_3}\} \in F$

$$P(A) = P(\omega_{k_1}) + P(\omega_{k_2}) + P(\omega_{k_3})$$

Είναι απλό να δούμε ότι η τριάδα (Ω, F, P) είναι ένας χώρος πιθανοτήτων, στον οποίο $P(\omega_2) = 0$ ενώ $\omega_2 \neq \phi$.

Άρα από την σχέση $P(A) = 0$ δεν προκύπτει λογικά ότι $A = \phi$.

Μάλιστα στη θεωρία τα γεγονότα για τα οποία ισχύει $P(A) = 0$ τα ονομάσαμε σχεδόν αδύνατα για να τα διακρίνουμε από το αδύνατο ενδεχόμενο.

4

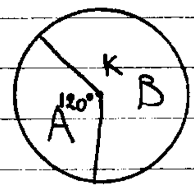
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Στο σημείο αυτό ίσως κάποιος να αντιτείνει το εξής ισχυρισμό:

Το παραπάνω παράδειγμα είναι τεχνητό και δεν αναφέρεται σε "πραγματικό" πείραμα τύχης. Θα επέμενε μάλιστα ότι σε "πραγματικά-εμπειρικά" πειράματα τύχης, μπορεί βέβαια να ικανοποιούνται τα αξιώματα της θεωρίας, όμως ουδέποτε θα μπορούσε να αποδοθεί πιθανότητα μηδέν σε μη αδύνατο ενδεχόμενο.

Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στην παραπάνω ένσταση με την βοήθεια του παρακάτω πειράματος τύχης.

Θεωρούμε έναν κυκλικό δίσκο, κέντρου K και δύο κυκλικούς τομείς, γωνίας 120° και 240° αντίστοιχα. Ας ονομάσουμε Ω τον κυκλικό δίσκο και A, B τους δύο τομείς, θεωρώντας ότι το K δεν ανήκει σ' αυτούς.



Το πείραμα τύχης που θα θεωρήσουμε είναι η ρίψη ενός βέλους και η παρατήρηση του σημείου πρόσκρουσης του βέλους στον κυκλικό στόχο. Συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει αν το βέλος χτύπησε σημείο των περιοχών A, B ή το σημείο K.

Τότε $\Omega = \{A, B, K\}$. Θεωρούμε ως F το δυναμοσύνολο του Ω, και ορίζουμε τις πιθανότητες ως εξής:

$$P(A) = \frac{\text{εμβαδό } A}{\text{εμβαδό } \Omega} = \frac{(A)}{(\Omega)} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{(B)}{(\Omega)} = \frac{2}{3}, \quad P(K) = \frac{(K)}{(\Omega)} = 0.$$

Προφανώς (Ω, F, P) είναι ένας χώρος πιθανότητας στον οποίο $P(K) = 0$ ενώ $K \neq \emptyset$.

Στο παράδειγμα που αναφέραμε δύο σημεία θα πρέπει να σχολιαστούν, για να προλάβουμε να οχυρώσουμε την θέση μας.

• Πρώτον, θα έλεγε κάποιος ότι η μύτη του βέλους όσο λεπτή και να είναι, έχει κάποιο εμβαδόν και έτσι στην πραγματικότητα καλύπτει όχι ακριβώς το K, αλλά μια μικρή

5

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

περιοχή γύρω από το K η οποία φυσικά έχει μη μηδενικό εμβαδό, και άρα αυτό δεν θα μπορούσε να δικαιολογήσει τον ορισμό της μηδενικής πιθανότητας του K.
Στο επιχείρημα αυτό έχουμε να απαντήσουμε ότι τότε για τον ίδιο λόγο θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι προτάσεις π.χ της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν είναι αληθείς στην πραγματικότητα, αφού όταν σχεδιάζουμε δυο γραμμές τεμνόμενες, το σημείο τομής τους δεν είναι αδιάστατο δεδομένου ότι οι γραμμές έχουν πάντοτε, ένα πάχος όταν σχεδιάζονται. Έτσι π.χ. ένας μηχανικός θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη αυτές τις αποκλίσεις από την θεωρία, όταν κάνει υπολογισμούς με βάση ένα σχέδιο, πράγμα που ως γνωστόν ουδέποτε γίνεται.
 Ο καλύτερος τρόπος όμως να δικαιολογήσουμε τον ορισμό $P(K)=0$ είναι να πούμε ότι το παραπάνω πείραμα είναι το εμπειρικό αντίστοιχο ενός ιδεατού (νοητού) πειράματος τύχης, όπου το βέλος θα μπορούσε να είναι μια ευθεία που τυχαία φέρεται από ένα σημείο εκτός του επιπέδου του κύκλου, προς τον κυκλικό δίσκο. Τότε η τομή της ευθείας με τον κυκλικό δίσκο είναι σημείο και επομένως έχει μηδενικό εμβαδό.

- Δεύτερον: Η πιθανότητα που αποδώσαμε στα ενδεχόμενα του Ω αν και αντιπροσωπεύει την ιδέα ότι η μεγαλύτερη περιοχή του στόχου έχει και μεγαλύτερη πιθανότητα να βληθεί, εντούτοις περιέχει κάποιο βαθμό αυθαιρεσίας.

 Εδώ έχουμε να απαντήσουμε ότι έτσι είναι στ' αλήθεια. Σχεδόν πάντοτε η απόδοση πιθανότητας σε ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης βασίζεται σε μια α-πριορί αποδοχή της τιμής της.
 Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την ανάρριψη ενός νομίσματος με δειγματικό χώρο $\Omega=\{K,\Gamma\}$. Τότε κατά κανόνα ορίζουμε $P(K)=P(\Gamma)=\frac{1}{2}$. Από πού όμως προέρχεται η πίστη μας ότι

6

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

αυτή είναι η "σωστή" τιμή πιθανότητας;
Μπορούμε να απαντήσουμε με δυο τρόπους.

α) Το νόμισμα είναι συμμετρικό και ομογενές και κάτω από την επίδραση τυχαίων αστάθμητων συνθηκών δεν είναι λογικό η μια όψη να εμφανίζεται περισσότερες φορές από την άλλη όταν το πείραμα επαναλαμβάνεται κάτω από τις ίδιες πρακτικά συνθήκες.

β) Εκτελούμε το πείραμα πολλές φορές, υπό τις ίδιες πρακτικά συνθήκες, και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.
Παρατηρούμε ότι όταν το πλήθος των επαναλήψεων γίνεται πολύ μεγάλο, η εμφάνιση των δυο όψεων είναι περίπου ισάριθμη και μάλιστα όσο μεγαλώνει το πλήθος των επαναλήψεων, τόσο πιο κοντά στο $\frac{1}{2}$ βρίσκεται ο λόγος του αριθμού εμφανίσεως της όψης Κ, προς το πλήθος των επαναλήψεων.

Παρατηρούμε ότι και στις δυο περιπτώσεις, η τιμή της πιθανότητας αν και έχει κάποια πραγματική βάση, στηρίζεται σε κάποια α-priori παραδοχή που δεν δικαιολογείται λογικά.
Στην πρώτη περίπτωση δεχόμαστε ότι η συμμετρία της κατασκευής έχει ως αποτέλεσμα την ισότητα των πιθανοτήτων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση δεχόμαστε ότι το όριο της σχετικής συχνότητας του Κ είναι $\frac{1}{2}$, αφού άπειρες επαναλήψεις είναι πρακτικά ανέφικτες.

Αυτός ο τελευταίος τρόπος προσέγγισης μάλιστα αποτελεί τη βάση του δεύτερου θεωρητικού πλαισίου για την πιθανότητα, και αναπτύχθηκε από τον Von Misses το 1931 λίγο νωρίτερα από την προσπάθεια του Kolmogoroff το 1933.

Πάντως η θεμελίωση του Von Misses αρχικά δεν είχε μεγάλη επιτυχία γιατί ήταν μείγμα θεωρίας και εμπειρίας και η μαθηματική της ανάλυση οδηγούσε σε πολλά προβλήματα. Σήμερα η κατεύθυνση αυτή έχει δώσει μια αυστηρή μαθηματική θεωρία με την βοήθεια των αναδρομικών συναρτήσεων.

7

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ας περιγράψουμε σύντομα την προσέγγιση αυτή για πεπερασμένους δειγματοχώρους.

Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu\}$ ο δ.χ. ενός πειράματος τύχης με δυνατά αποτελέσματα $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu$. Αν σε πλήθος N επαναλήψεων του πειράματος οι αριθμοί $N_1,N_2,\dots,N_\nu$ δηλώνουν πόσες φορές εμφανίστηκε αντίστοιχα το αποτέλεσμα $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu$ (συχνότητες) σε πλήθος $N_1+N_2+\dots+N_\nu=N$ επαναλήψεων, τότε ορίζουμε ως σχετική συχνότητα του ω_i τον αριθμό $f_i=\frac{N_i}{N}$, $i=1,2,\dots,\nu$

Προφανώς $0\le f_i\le 1$ και $f_1+f_2+\dots+f_\nu=1$.

Όταν το πλήθος N των επαναλήψεων του πειράματος τείνει στο άπειρο, δεχόμαστε αξιωματικά ότι οι σχετικές συχνότητες συγκλίνουν σε κάποιους αριθμούς P_i τους οποίους ορίζουμε ως πιθανότητες των ω_i. Δηλ. $P_i(\omega_i)=\lim\limits_{N\to\infty} f_i=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{N_i}{N}$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $0\le P_i\le 1$ και $P_1+P_2+\dots+P_\nu=1$.

[Στην ουσία αυτό που δεχόμαστε αξιωματικά είναι ότι η έννοια των τυχαίων αστάθμιστων συνθηκών απέναντι σε κάποιο αποτέλεσμα, κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης, κατανέμεται ομοιόμορφα σ' όλα τα δυνατά αποτελέσματα, στο σύνολο πολλών (θεωρητικά άπειρων) επαναλήψεων του πειράματος τύχης]

Αν τώρα F είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω (π.χ. $F=P(\Omega)$) και $A\in F$ με $A=\{\omega_{k_1},\dots,\omega_{k_\tau}\}$ τότε ορίζουμε

$$P(A)=P(\omega_{k_1})+\dots+P(\omega_{k_\tau})$$

(Είναι εύκολο να δούμε ότι ο χώρος (Ω,F,P) είναι χώρος πιθανότητας κατά την έννοια Kolmogoroff).

Αν τώρα ισχύει $P(\omega_i)=0$ τότε $\lim\limits_{N\to\infty} f_i=0$ δηλαδή $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{N_i}{N}=0$.

Η παραπάνω σχέση δεν σημαίνει φυσικά ότι πάντοτε

8

Ισχύει $N_i=0$ δηλαδή ότι το ω_i είναι το αδύνατο ενδεχόμενο. Θα μπορούσε λ.χ. να είναι $0<N_i\leq\sqrt{N}$ οπότε

$$0\leq\frac{N_i}{N}\leq\frac{1}{\sqrt{N}}\longrightarrow 0.$$

Συνεπώς και πάλι από την σχέση $P(A)=0$ δεν προκύπτει λογικά ότι $A=\emptyset$.

Κλείνοντας θα πρέπει να τονίσουμε ότι το φαινόμενο μηδενικής πιθανότητας μη κενών στοιχείων του F, είναι ένα σύνηθες φαινόμενο σε άπειρους χώρους πιθανοτήτων και κρύβει την πολύ σημαντική έννοια των συνόλων μηδενικού μέτρου.

Παρατήρηση: Με παρόμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι αν $P(A)=1$ τότε δεν είναι αναγκαστικά το A ίσο με το βέβαιο ενδεχόμενο.

Βιβλιογραφία

1. Schnorr, C.P. Zufälligkeit and Wahrscheinlichkeit, Lecture Notes in Mathematics, No 218, Springer, 1971

2. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications. Wiley 1968

3. Γεωργίου Σταματέλου: Στοιχεία θεωρίας πιθανοτήτων. Θεσ/νίκη

4. Σ. Κουνιά, Χ. Μωυσιάδη. Πιθανότητες I Θεσ/νίκη 1985.

5. Ιωάννα Χαΐνη: Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων Αθήνα 1969

6. Θ. Καζαντζή: Πιθανότητες: Θεσ/νίκη 1995